Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di Metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

6 Giugno 2017

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min_u \int_0^1 u^2 \,\mathrm{d}t + (x(1))^2 \\ \dot{x} = x + u \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \max \int_0^2 (2x - 4u) \,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = x + u \\ x(0) = 5 \\ 0 \le u \le 2 \end{cases}$$

In order to solve the PDE $Ax + xF_x + F_t = 0$ (with A constant), we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{F(t,x) = ax + bxe^{-t} + c,\ \ a,b,c \in \mathbb{R}\}$; for the PDE $Ax + xF_x + BF_x + F_t + C = 0$ (with A, B and C constants), we suggest the family $\mathcal{F} = \{F(t,x) = ax + bt + ce^{-t} + dxe^{-t} + f,\ \ a,b,c,d,f \in \mathbb{R}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente gioco differenziale a somma zero:

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = \int_0^T f(t,\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)\,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t,\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{1}$$

ove T è fissato e U_i sono i control set per i due giocatori.

i. Si introducano, con rigore, le definizioni di funzione valore inferiore V^- e di funzione valore superiore V^+. Quando si dice che il problema (1) ammette funzione valore V?

ii. Si introduca la nozione di equilibrio di Nash per il problema (1). Si fornisca la condizione di Isaacs per il problema (1). Supponiamo che il problema (1) ammetta funzione valore V: si illustrino le proprietà di V, sotto le opportune ipotesi.

iii. Si consideri ora il problema

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = \psi(T,\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t,\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \\ (T,\mathbf{x}(T)) \in \partial S \end{cases} \tag{2}$$

con T libero e target set $S \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$. Si supponga che il problema ammetta funzione valore in C^1 e che sia soddisfatta la condizione di Isaacs. Si fornisca una dimostrazione geometrica dell'equazione di Isaacs per il problema (2).

4. 4. (6 punti) Si consideri il modello "lavoratori e capitalisti" di Lancaster:

$$\begin{cases} \text{Wor.:} \quad \max\limits_{u} \displaystyle\int_0^T uk \, \mathrm{d}t & \qquad \text{Cap.:} \quad \max\limits_{v} \displaystyle\int_0^T (1-v)(1-u)k \, \mathrm{d}t \\ \quad 0 < a \le u \le b < 1 & \qquad \qquad 0 \le v \le 1 \\ & \dot{k} = v(1-u)k \\ & k(0) = k_0 > 0 \end{cases}$$

ove $a, \ b, \ T$ e k_0 sono fissati.

i. Si introduca con rigore il modello proposto;

ii. si introduca per un gioco differenziale a due giocatori, la nozione di equilibrio di Nash open–loop e gli elementi di teoria necessari per determinare tale equilibrio nel modello proposto (non è richiesto provare nulla);

iii. nel caso $b \ge 1/2$, si determini l'equilibrio di Nash open–loop nel modello proposto.

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo autonomo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} \ J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k, \ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con t_0 e t_1 fissati.

i. Nelle ipotesi che il control set U sia compatto e che $f, \ g$ e ψ siano limitate e Lipschitz rispetto a $\mathbf{x}$ uniformemente rispetto a $\mathbf{u}$, si provi che la funzione valore è limitata e Lipschitz;

ii. si consideri l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi: il fatto che la funzione valore sia Lipschitz che conseguenze ha? Si introduca la nozione di soluzione viscosa per l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi, motivando la necessità di tale definizione.