Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di Metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

30 Giugno 2017

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^{11} x \,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = u \\ x(0) = 0 \\ x(11) = 1 \\ -1 \leq u \leq 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\int_0^{2} (x^2 + u^2) \,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = x + u \\ x(0) = -2 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

In order to solve the PDE $xF_x + Ax^2 + BF_x^2 + F_t = 0$ (with A and B constants), we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{F(t,x) = x^2 G(t),\ \text{with } G = G(t) \text{ function}\}$.

3. (6 punti) Si consideri un problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \,\mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con $f \in C^1,\ g \in C^1$ e l'insieme $U \subset \mathbb{R}^k$.

i. Nel contesto del metodo variazionale e sotto opportune ipotesi, si enunci la condizione necessaria di ottimalitá;

ii. nel contesto della programmazione dinamica e sotto opportune ipotesi, si enunci la condizione necessaria di ottimalitá;

iii. sotto ragionevoli ipotesi, si enunci e si provi il legame tra moltiplicatore e funzione valore.

4. (6 punti) Nel contesto della teoria dei giochi differenziali di cattura-evasione, si consideri il modello "the lady in the lake":

$$\begin{cases} \textit{Man (P)}: \min\limits_{u_1} |\theta(T)| \qquad \textit{Lady (E)}: \max\limits_{u_2} |\theta(T)| \\ |u_1| \leq 1 \\ \dot{\theta} = \dfrac{v_E \sin u_2}{r} - \dfrac{u_1}{R} \\ \dot{r} = v_E \cos u_2 \\ r(0) = 0,\ r(T) = R \end{cases}$$

con v_E fissato in $(0,1)$, $R>0$ fissato e $T>0$ libero.

i. Si introduca il modello proposto;

ii. si risolva il modello determinando i controlli ottimi. In particolare è richiesto lo studio sulla possibilità che i due giocatori realizzino il loro pay off, cioè del segno di $\theta(T^*)$ al tempo ottimo di uscita T^*.

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-rt} f(\mathbf{x},\mathbf{u})\,\mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \displaystyle\max_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}_{0,\boldsymbol{\alpha}}} J(\mathbf{u}) \end{cases} \tag{1}$$

con $r>0$.

i. Si introduca con rigore la nozione di funzione valore corrente V^c. Si dimostri la relazione tra V^c e la funzione valore V del problema. Si ricavi l'equazione di Bellman–Hamilton–Jacobi per V^c;

ii. si usino i risultati del punto precedente per risolvere il seguente modello di "optimal consumption "

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\gamma} c^\gamma e^{-\delta t}\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = rx - c \\ x(0) = x_0 > 0 \\ x \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases}$$

ove r, γ e δ sono costanti positivi, con $\gamma\in(0,1)$, tali che $\delta > r\gamma$.