Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di Metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

15 Aprile 2016

Cognome:_____________________________ nome:_____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \max \int_0^4 3x \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = x + u \\ x(0) = 0 \\ x(4) = \frac{3}{2}e^4 \\ 0 \le u \le 2 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min \int_0^2 (x^2 + u^2) \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = x + u \\ x(0) = -2 \\ u \ge 0 \end{cases}$$

In order to solve the PDE $xF_x + Ax^2 + BF_x^2 + F_t = 0$ (with A and B constants), we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{F(t,x) = x^2 G(t), \text{ with } G = G(t) \text{ function}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k, \ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases} \tag{1}$$

con $\boldsymbol{\alpha}$, t_0 e t_1 fissati.

i. Sotto opportune ipotesi, si enunci e si provi la condizione necessaria di Bellman–Hamilton–Jacobi affinchè V sia funzione valore V del problema (1);

ii. Sotto opportune ipotesi, si enunci e si provi una condizione sufficiente affinchè V sia la funzione valore per il problema (1) e $\mathbf{u}^*$ suo controllo ottimo;

4. (6 punti) Si consideri il "two-sector model"

$$\begin{cases} \max_{u \in \mathcal{C}} \int_0^T x_2 \, \mathrm{d}t \\ \dot{x}_1 = \alpha u x_1 \\ \dot{x}_2 = \alpha(1-u) x_1 \\ x_1(0) = a_1 \\ x_2(0) = a_2 \\ \mathcal{C} = \{u : [0,T] \to [0,1] \subset \mathbb{R}, \ u \in KC\} \end{cases}$$

dove $\alpha,\ a_1,\ a_2$ e T sono positivi e fissi; si consideri in particolare il caso $T > \frac{2}{\alpha}$.

i. Si introduca con rigore il modello proposto;

ii. si risolva il modello proposto.

5. (6 punti) Si consideri il modello "two fishermen at the lake" (dove abbiamo già operato la sostituzione $y(t) = \ln x(t)$, con $x = x(t)$ quantità di pesce nel lago):

$$\begin{cases} \text{I F.:}\ \max\limits_{w_1} \displaystyle\int_0^\infty a_1(y + \ln w_1)e^{-rt}\,\mathrm{d}t \qquad \text{II F.:}\ \max\limits_{w_2} \displaystyle\int_0^\infty a_2(y + \ln w_2)e^{-rt}\,\mathrm{d}t \\ \qquad w_1 \geq 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad w_2 \geq 0 \\ \dot{y} = \alpha - w_1 - w_2 - \beta y \\ y(0) = y_0 \geq \ln 2, \qquad y(t) \geq \ln 2 \end{cases}$$

i. Si introduca con rigore il modello proposto;

ii. si introduca per un gioco differenziale a due giocatori, la nozione di equilibrio di Nash open–loop e gli elementi di teoria necessari per determinare tale equilibrio nel modello proposto (non è richiesto provare nulla);

iii. si determini l'equilibrio di Nash open–loop nel modello proposto.