

Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

18 Febbraio 2019

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.

Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce. Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.

Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova.

Al termine della prova devi riconsegnare *tutti e solo* i fogli ricevuti.

Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola.

I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$.

$$f(x) = \frac{2x}{x+1}$$

- (a) (4 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione, gli *asintoti orizzontali e verticali* e disegna il *grafico*.
- (b) (3 punti) Calcola i valori di x per cui i valori restituiti da $f(x)$ siano minori o uguali a 4:

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} \leq 4$$

e individua l'insieme delle soluzioni nel grafico al punto precedente.

- (c) (3 punti) Definisci la funzione $|f(x)|$ e disegna il grafico.
- (d) (4 punti) Considerando la funzione definita al punto precedente, risolvi la seguente *disuguaglianza con valore assoluto*:

$$|f(x)| \leq 4$$

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

2. (3 punti) *Esercizio.* Determina *minimo, massimo, estremi superiori, estremi inferiori, punti interni, punti di accumulazione, punti di frontiera e punti isolati* del seguente insieme:

$$A = \{x \in \mathcal{R} : -1 < x < 2, x \neq 0\}$$

3. *Problema:* Supponi che i costi totali (c) che la tua impresa affronta siano determinati dalla seguente funzione della quantità prodotta:

$$c(x) = 10x^2$$

dove la quantità prodotta, x , è espressa in migliaia di unità e i costi totali sono espressi in migliaia di euro. Ipotizza di riuscire a vendere ogni unità prodotta a un prezzo pari a 20 euro, per cui i ricavi totali sono dati dalla seguente funzione della quantità prodotta:

$$r(x) = 20x$$

- (a) (3 punti) Sapendo che i profitti sono dati dalla differenza tra ricavi e costi, deriva la funzione di profitto, che lega i profitti (p) alla quantità prodotta (x), e determina i livelli di produzione x in corrispondenza dei quali l'impresa non è in perdita (il profitto è positivo o nullo).
- (b) (4 punti) Calcola le *derivate prime e seconde* delle funzioni di costo, $c(x)$, ricavo, $r(x)$, e profitto, $p(x)$, e disegna il *grafico* delle tre funzioni su uno stesso piano cartesiano.
- (c) (2 punti) Determina la quantità che massimizza il profitto e il profitto massimo ottenibile dall'impresa.
4. (2 punti) *Problema.* Immagina di possedere 30 vestiti e 15 paia di scarpe e di dover scegliere 5 vestiti e 3 paia di scarpe da mettere in valigia prima di partire per un viaggio. Se dedichi un secondo del tuo tempo a vagliare ognuna delle possibilità a tua disposizione, quanto tempo impiegherai?
5. (2 punti) *Problema.* Supponi che in un determinato sistema economico la popolazione al tempo t sia data dalla seguente funzione:

$$p(t) = p_0 e^{g \cdot t}$$

dove e è il numero di Nepero (o Eulero) e p_0 e g sono parametri strettamente positivi che indicano, rispettivamente, la popolazione iniziale e il tasso di crescita.

Ipotizza anche che il reddito al tempo t sia:

$$y(t) = y_0 e^{2g \cdot t}$$

dove $y_0 = p_0/2$ rappresenta il reddito iniziale.

Determina la funzione del reddito pro-capite, dato dal rapporto tra reddito e popolazione, e disegnano un grafico qualitativo.

Esercizio/Problema:	1	2	3	4	5	Totale
Punti:	14	3	9	2	2	30
Punteggio:						