Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

2 Luglio 2020

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.
Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova.
Al termine della prova devi riconsegnare *tutti e solo* i fogli ricevuti.
Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola.
I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

(a) (2 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione.

Soluzione:
La funzione è definita per ogni valore reale di x che non rende nullo il denominatore, per cui l'insieme di definizione è $\mathcal{R}\backslash\{-2\}$.

(b) (3 punti) Determina il *segno della funzione* nel campo di esistenza ($f(x) \geq 0$) e le eventuali *intersezioni con gli assi.*

Soluzione:
Per determinare il segno della funzione occorre risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 2} \geq 0$$

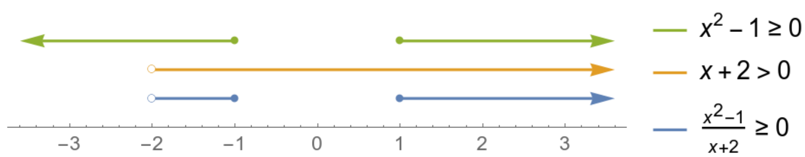
*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Si tratta di una disequazione fratta già ridotta alla forma normale, per cui occorre studiare separatamente segno del numeratore (che comporta la risoluzione di una disequazione quadratica) e del denominatore, e applicare la regola dei segni.

$$\begin{aligned} N(x) \geq 0: &\quad x^2 - 1 \geq 0 \\ D(x) > 0: &\quad x + 2 > 0 \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} N(x) \geq 0: &\quad (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ D(x) > 0: &\quad (-2, +\infty) \end{aligned}$$



$f(x) \geq 0$ per ogni $x \in (-2, -1] \cup [1, +\infty)$.
La funzione interseca l'asse delle ascisse per $x \in \{-1, 1\}$.
L'intersezione con l'asse delle ordinate è invece il punto di coordinate $(0, -1/2)$.

(c) (2 punti) Determina gli eventuali *asintoti verticali*.

Soluzione:
Si ha un asintoto verticale in corrispondenza del valore che annulla il denominatore ($x = -2$). Si ha infatti:

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 - 1}{x + 2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 - 1}{x + 2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

(d) (3 punti) Dopo aver calcolato i *limiti* di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, mostra che esiste ed è finito e diverso da zero il seguente limite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

Dopo aver calcolato il limite m, calcola anche il seguente limite, mostrando che esiste ed è finito:

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = q$$

Infine, dopo aver determinato anche il limite q, potrai determinare l'equazione dell'*asintoto obliquo* di $f(x)$, poiché questo è dato dalla retta di equazione: $y = mx + q$.

Soluzione:
$f(x)$ è una funzione infinita per $x \to \infty$. Si ha infatti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x+2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x+2} = -\infty$$

Si ha però:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-\frac{1}{x}}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = 1$$

Per cui $m = 1$. Inoltre:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} (f(x)-x) &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1-x^2-2x}{x+2} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x-1}{x+2} = -2\end{aligned}$$

L'equazione dell'asintoto obliquo è pertanto: $y = x - 2$.

(e) (3 punti) Calcola la *derivata prima* $f'(x)$ e determina i valori per cui $f(x)$ è *crescente/decrescente* e gli eventuali *punti stazionari* studiando il segno di questa derivata.

Soluzione:
Applicando la regola della derivata di un rapporto si ha:

$$f'(x) = \frac{2x(x+2)-(x^2-1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

Il denominatore di questa funzione è sempre positivo per ogni $x \neq -2$. Il segno è deciso dal numeratore, per cui si tratta di risolvere la seguente disequazione quadratica:

$$x^2 + 4x + 1 \geq 0$$

L'equazione associata ha due radici reali e distinte: $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$ e la disequazione è soddisfatta per $x \in (-\infty, -2-\sqrt{3}] \cup [-2+\sqrt{3}, +\infty)$.
$f(x)$ è pertanto crescente in questo intervallo, mentre $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$ sono punti stazionari. $x = -2-\sqrt{3}$ è un massimo relativo (la funzione cambia da crescente a decrescente), mentre $x = -2+\sqrt{3}$ un minimo relativo (la funzione cambia da decrescente a crescente).

(f) (3 punti) Calcola la *derivata seconda* $f''(x)$ e determina la *concavità/convessità* di $f(x)$ studiando il segno di tale derivata.

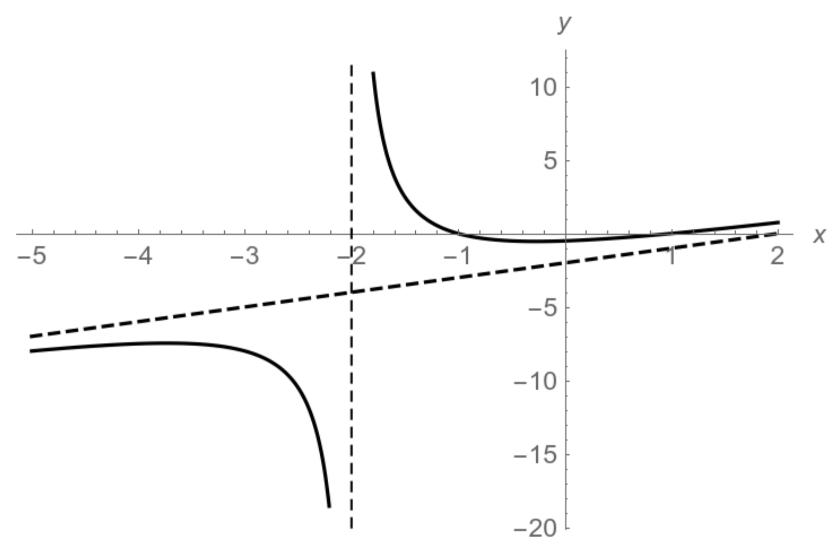
Soluzione:

$$f''(x) = D\left[\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}\right] = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - 2(x+2)(x^2+4x+1)}{(x+2)^4}$$
$$= \frac{(2x+4)(x+2) - 2(x^2+4x+1)}{(x+2)^3} = \frac{2x^2+8x+8-2x^2-8x-2}{(x+2)^3} = \frac{6}{(x+2)^3}$$

Il segno è deciso dal denominatore, per cui $f''(x) > 0$ per ogni $x > -2$. La funzione sarà pertanto strettamente concava per $x < -2$ e strettamente convessa per $x > -2$.

(g) (3 punti) Disegna il *grafico* della funzione $f(x)$ nell'intervallo $x \in (-5, 2)$.

Soluzione:



2. *Problema.* In un Paese il numero di morti dovuti a una determinata malattia infettiva sta crescendo in modo esponenziale. Dai dati a disposizione risulta che il tempo di raddoppio è esattamente una settimana (i morti totali raddoppiano ogni 7 giorni) e i morti totali fino a oggi sono stati circa 20 mila.

(a) (3 punti) Di quanto crescono in termini percentuali i morti totali ogni giorno?

Soluzione:
Il tasso di crescita giornaliero x è ottenuto risolvendo la seguente equazione:

$$\begin{aligned} (1+x)^7 &= 2 \\ 1+x &= \sqrt[7]{2} \\ x &= \sqrt[7]{2} - 1 \approx 0,104 \end{aligned}$$

I morti aumentano ogni giorno del 10,4% circa.

(b) (3 punti) Quante nuove morti si sono registrate all'incirca negli ultimi due giorni?

Soluzione:
Poiché la variabile cresce ogni giorno del 10,4% (la variazione relativa che si registra è esattamente pari a $\sqrt[7]{2}-1$) e i morti oggi ammontano a 20 mila, i morti complessivi due giorni fa x si ottengono risolvendo la seguente equazione:

$$\begin{aligned} x(1+\sqrt[7]{2}-1)^2 &= 20 \\ x &= \frac{20}{2^{\frac{2}{7}}} \approx 16,41 \end{aligned}$$

Sottraendo questo numero a 20 (mila) si ottiene la variazione assoluta negli ultimi due giorni. Negli ultimi due giorni sono pertanto morte stando ai dati 3 590 persone.

(c) (2 punti) Quante nuove morti ci si aspetta avverranno nei prossimi due giorni?

Soluzione:

$$20(1+\sqrt[7]{2}-1)^2 - 20 = 20(2^{\frac{2}{7}}-1) \approx 4,38$$

I morti attesi sono 4 380.

3. (3 punti) *Problema.* Immagina di avere 5 portachiavi e 25 chiavi e di dover decidere come distribuire queste chiavi tra i diversi portachiavi. Qual è il numero delle possibilità tra cui scegliere se sai che non devi necessariamente utilizzare tutti i portachiavi e che ognuno di questi può contenere se si vuole anche tutte le chiavi?

Soluzione:
Ogni "distribuzione" è di fatto una funzione che è possibile definire avente l'insieme delle chiavi come dominio e quello dei portachiavi come codominio.

Essendo 25 gli elementi nel dominio e 5 quelli nel codominio, il numero delle possibili funzioni è dato dalle disposizioni con ripetizione di 5 oggetti di classe 20:

$$D'_{5,25} = 5^{25} \approx 298 \times 10^{15}$$

Le possibilità complessive sono quindi più di 298 milioni di miliardi.

Esercizio/Problema:	1	2	3	Totale
Punti:	19	8	3	30
Punteggio:				