Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

16 Settembre 2020

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce. Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$.

$$f(x) = \frac{2x+2}{x+2} - 1$$

   (a) (2 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione.

   Soluzione:
   La funzione è definita per ogni valore reale di x che non rende nullo il denominatore, per cui l'insieme di definizione risulta $\mathcal{R} \backslash \{-2\}$.

   (b) (3 punti) Determina gli *asintoti orizzontali*, gli *asintoti verticali* e le intersezioni con gli assi.

   Soluzione:
   Possiamo riesprimere la funzione come segue:

$$f(x) = \frac{2x+2}{x+2} - 1 = \frac{2x+2-x-2}{x+2} = \frac{x}{x+2}$$

   La funzione appartiene alla classe delle funzioni omografiche, rappresentate nel piano da iperboli equilatere. In questo caso il centro di simmetria dell'iperbole ha coordinate $(-2, 1)$. L'asintoto verticale è quindi la retta $x = -2$, essendo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \to -2^-} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

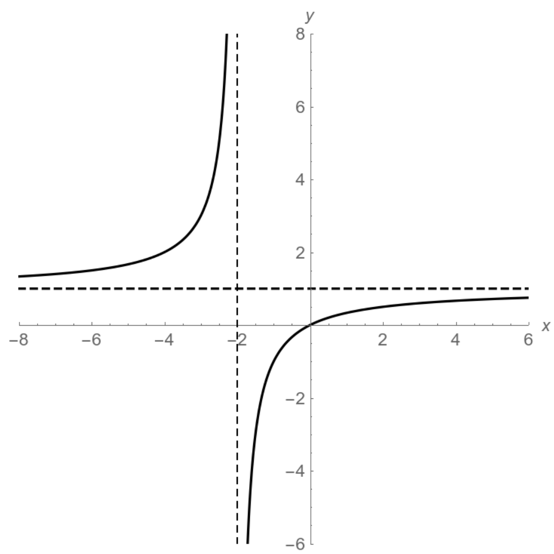
mentre quello orizzontale è la retta $y = 1$, avendosi:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

L'iperbole passa per l'origine degli assi essendo $f(0) = 0$.

(c) (2 punti) Disegna il *grafico* della funzione.

Soluzione:



(d) (3 punti) Definisci la funzione $|f(x)|$ e disegnane il grafico.

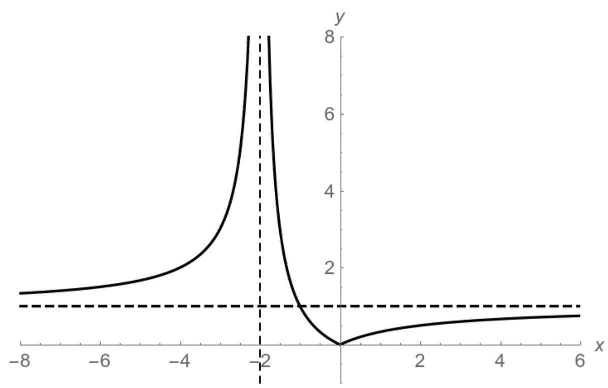
Soluzione:
La funzione $|f(x)|$ è data da:

$$|f(x)| = \begin{cases} \frac{x}{x+2} & \text{se } \frac{x}{x+2} \geq 0 \\ -\frac{x}{x+2} & \text{se } \frac{x}{x+2} < 0 \end{cases}$$

da cui:

$$|f(x)| = \begin{cases} \frac{x}{x+2} & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup [0, +\infty) \\ -\frac{x}{x+2} & \text{se } x \in (-2, 0) \end{cases}$$

La figura sotto ne mostra il grafico.



(e) (3 punti) Considerando la funzione definita al punto precedente, risolvi la seguente *disequazione fratta con valore assoluto*:

$$|f(x)| \geq 2$$

e rappresenta graficamente la soluzione.

Soluzione:

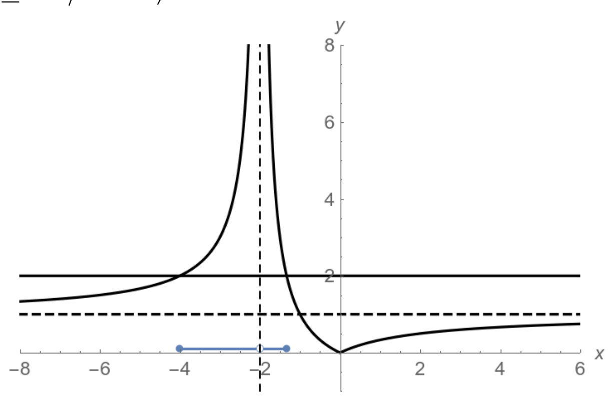
$$\frac{x}{x+2} \leq -2 \qquad \vee \qquad \frac{x}{x+2} \geq 2$$

$$\frac{3x+4}{x+2} \leq 0 \qquad \vee \qquad \frac{x+4}{x+2} \leq 0$$

che rappresenta l'unione degli insiemi delle soluzioni di due disequazioni fratte.

La disequazione a sinistra è soddisfatta per $x \in (-2, -4/3]$, mentre quella a destra per $x \in [-4, -2)$.

Unendo i due intervalli otteniamo la soluzione: la disequazione è soddisfatta per ogni x tale che $-4 \leq x \leq -4/3$ e $x \neq -2$.



2. *Problema.* Supponi che il numero totale di contagiati da una determinata malattia infettiva in un Paese sia attualmente pari a 500 e l'epidemia sia nella fase iniziale di crescita esponenziale, con un tasso di crescita giornaliero dei contagiati pari al 7%.

(a) (3 punti) Determina la funzione $f(t)$ che mette in relazione il numero totale dei contagiati con il numero totale dei giorni trascorsi rispetto a oggi ($t = 0$ indica oggi, $t = 1$ indica domani, ecc.). Di che tipo di funzione si tratta?

Soluzione:

$$f(t) = 500 \cdot 1,07^t$$

Si tratta di una funzione esponenziale (di fatto, più propriamente di una successione, essendo il fenomeno osservato a intervalli discreti ed essendo quindi f definita su $\mathcal{N}$), con base maggiore di uno (1,07), quindi strettamente crescente e convessa, e intercetta con l'asse delle ordinate pari a 500.

(b) (3 punti) Ipotizzando che $f(t)$ sia definita in $\mathcal{R}$, calcola la derivata della funzione $f(t)$, che approssima per ogni giorno l'aumento dei contagiati nelle 24 ore successive. In base a tale derivata, qual è all'incirca l'aumento dei contagiati che si dovrebbe osservare tra il sesto e il settimo giorno a partire da oggi?

Soluzione:

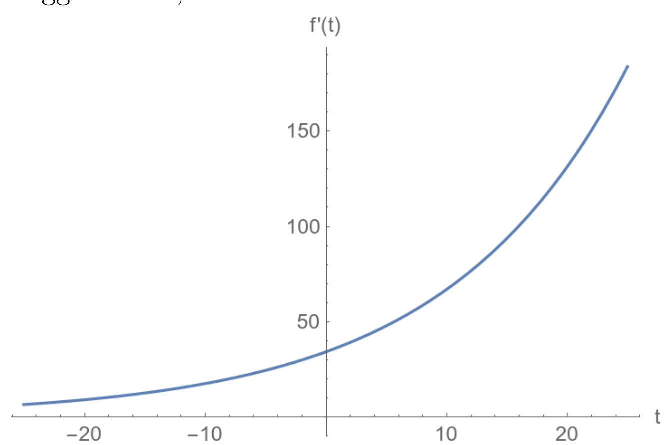
$$f'(t) = 500 \cdot \ln(1,07) \cdot 1,07^t$$

In base a tale derivata, l'aumento dei contagiati che ci si aspetta di osservare tra il sesto e il settimo giorno risulta essere:

$$f'(6) = 500 \cdot \ln(1,07) \cdot 1,07^6 \approx 33,83 \cdot 1,07^6 \approx 51$$

(c) (3 punti) Disegna il grafico di $f'(t)$, la derivata della funzione $f(t)$.

Soluzione:
Si tratta ancora di una funzione esponenziale (la derivata di un'esponenziale è un'esponenziale), avente la stessa base (1,07) e intercetta pari a 500 $\ln 1,07 \approx 33,83$.
Essendo la base maggiore di 1, la funzione è strettamente crescente e convessa.

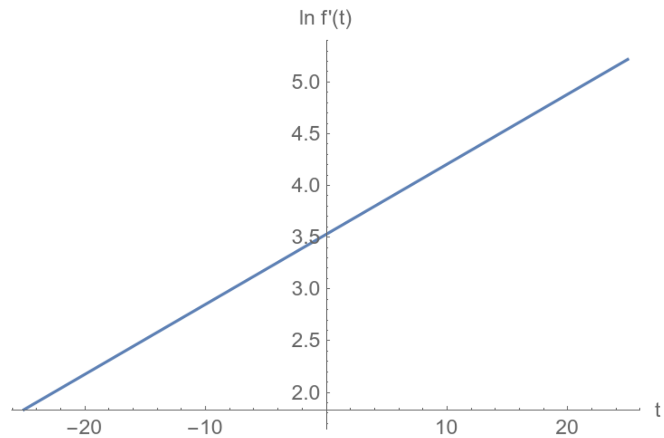


(d) (3 punti) Disegna il grafico di cui al punto precedente in *scala logaritmica*: sull'asse delle ordinate, invece di rappresentare la derivata $f'(t)$, rappresenta il logaritmo naturale della derivata, $\ln f'(t)$. Come cambia la forma del grafico?

Soluzione:
Poiché la funzione di partenza è esponenziale, la rappresentazione in scala logaritmica la trasforma in una funzione lineare il cui grafico è una retta. Si ha infatti:

$$\ln f'(t) = \ln\left(500 \cdot \ln(1,07) \cdot 1,07^t\right) = \ln\left(500 \cdot \ln(1,07)\right) + (\ln 1,07) \cdot t \approx 3,52 + 0,07\,t$$

che è una funzione lineare in t con intercetta pari a circa 3,52 e coefficiente angolare pari a circa 0,07 (il tasso di crescita annuale).



3. *Problema.* Hai 20 fogli bianchi identici e devi decidere come suddividerli tra 5 cartelle diverse.

   (a) (3 punti) Quanti sono i modi in cui è possibile distribuire tutti i fogli tra le diverse cartelle ammettendo la possibilità che una o più cartelle rimangano vuote?
   Es. tutti i 20 fogli nella prima cartella; 4 fogli in ognuna delle cartelle; 10 fogli nella prima cartella, 5 nella seconda e i restanti 5 nella quarta cartella; ecc.

   Soluzione:
   I modi possono essere determinati calcolando le combinazioni con ripetizione di 5 oggetti di classe 20:

   $$C'_{5,20} = \binom{5+20-1}{20} = \binom{5+20-1}{5-1} = \frac{(5+20-1)!}{20!\,(5-1)!} = \frac{24!}{20!\,4!}$$
   $$= \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 23 \cdot 22 \cdot 21 = 10\,626$$

   (b) (2 punti) Come cambia la risposta al punto precedente se ogni cartella deve contenere almeno un foglio?

   Soluzione:

In questo caso i modi sono pari alle combinazioni con ripetizione di 5 oggetti di classe 15 (i restanti fogli dei 20 originari dopo aver inserito un foglio in ognuna delle 5 cartelle):

$$C'_{5,20} = \binom{5+15-1}{15} = \binom{5+15-1}{5-1} = \frac{(5+15-1)!}{15!\,(5-1)!} = \frac{19!}{15!\,4!}$$
$$= \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 19 \cdot 17 \cdot 12 = 3\,876$$

Esercizio/Problema:	1	2	3	Totale
Punti:	13	12	5	30
Punteggio:				