Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

19 Gennaio 2022

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.
Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova. Al termine della prova devi riconsegnare tutti e solo i fogli ricevuti.
Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola. *I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.*

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

dove ln è il logaritmo naturale (base e).

(a) (2 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione f.

Soluzione:
La funzione è definita per ogni x che non rende nullo il denominatore ($x \neq 0$) e rende strettamente positivo l'argomento del logaritmo ($x > 0$).
L'insieme di definizione di f è pertanto l'insieme dei numeri reali positivi: $x \in (0, +\infty)$.

(b) (3 punti) Determina il *segno della funzione* f ($f(x) \geq 0$) nel campo di esistenza e le eventuali *intersezioni con gli assi.*

Soluzione:
Non essendo f definita per $x = 0$, il grafico della funzione non interseca l'asse delle ordinate.

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Per studiare il segno della funzione risolviamo la seguente disequazione fratta logaritmica:

$$\frac{\ln x}{x} \geq 0$$

Nel campo di esistenza della funzione ($x > 0$), il denominatore è sempre positivo, per cui il segno è deciso dal numeratore:

$$\ln x \geq 0$$

da cui segue:

$$x \geq 1.$$

Il grafico di f riposa dunque nel primo quadrante del piano cartesiano per $x > 1$, interseca l'asse delle ascisse nel punto $x = 1$ e si trova nel quarto quadrante per valori di x appartenenti all'intervallo aperto e limitato $(0, 1)$.

(c) (2 punti) Determina gli eventuali *asintoti verticali*.

Soluzione:
Poiché si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0^+} \ln x\right) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

l'asintoto verticale (destro) corrisponde all'asse delle ordinate.

(d) (2 punti) Calcola i limiti di f per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ e determina gli eventuali *asintoti orizzontali*.

Soluzione:
Il limite per $x \to +\infty$ di f esiste ed è pari a 0:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

dove il risultato segue dalla gerarchia degli ordini di infinito.

La funzione presenta quindi un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ (destro) corrispondente all'asse delle ascisse.

Il limite per $x \to -\infty$ invece non esiste, perché la funzione non è definita per valori negativi e quindi non può esistere un asintoto orizzontale sinistro.

(e) (3 punti) Calcola la *derivata prima* $f'(x)$ e determina i valori per cui la funzione f è *crescente/decrescente* e gli eventuali *punti stazionari* studiando il segno di questa derivata.

Soluzione:

Applicando la regola della derivata di un rapporto si trova:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln x}{x} = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Il denominatore è sempre positivo per ogni $x > 0$, per cui il segno della derivata è deciso dal numeratore.

In particolare la derivata prima è positiva (e quindi la funzione f crescente in senso stretto) se:

$$1 - \ln x > 0$$

da cui:

$$0 < x < \mathrm{e}$$

La derivata prima è invece negativa (e quindi la funzione f decrescente in senso stretto) per ogni $x \in (\mathrm{e}, +\infty)$.

Il punto $x_0 = \mathrm{e}$ è l'unico punto stazionario. Si tratta di un punto di massimo relativo, poiché la derivata prima passa dall'essere positiva all'essere negativa.

(f) (3 punti) Calcola la *derivata seconda* $f''(x)$ e determina la *concavità/convessità* di $f(x)$ e gli eventuali *punti di flesso*, studiando il segno di tale derivata.

Soluzione:

Derivando due volte la funzione si ottiene:

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1-\ln x)2x}{x^4} = \frac{-1-2+2\ln x}{x^3} = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

Il denominatore è positivo per $x > 0$, per cui il segno della derivata seconda è deciso dal numeratore. Questo è positivo se:

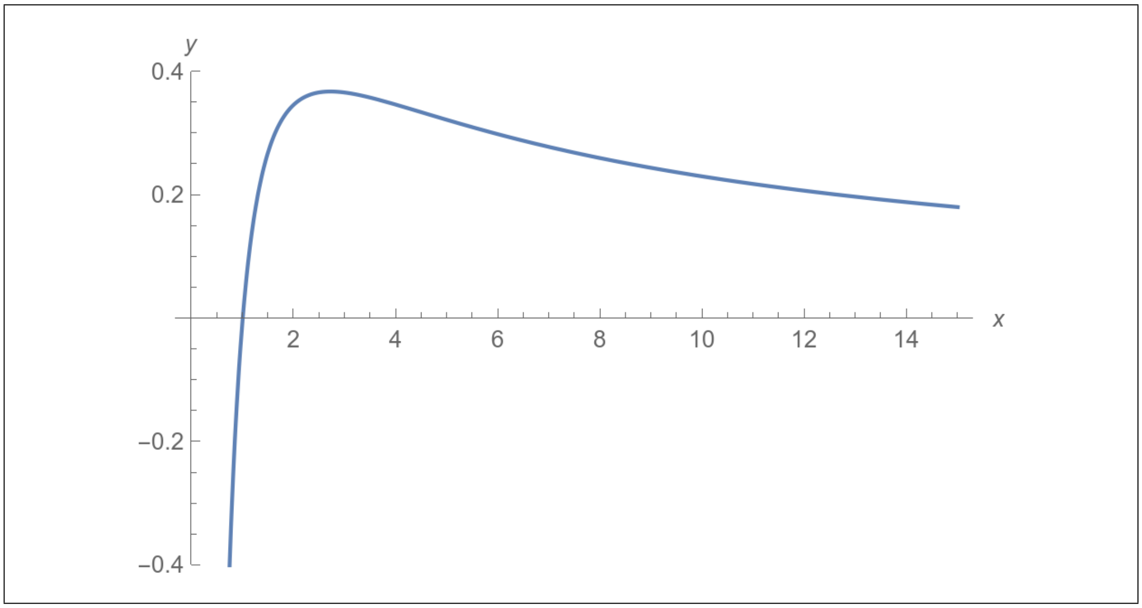
$$-3 + 2\ln x > 0$$

da cui segue che la derivata seconda è positiva (e la funzione f quindi strettamente convessa) per $x > \mathrm{e}^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^3} \approx 4,48$. La derivata seconda è invece negativa (e f quindi strettamente concava) nell'intervallo $(0, \mathrm{e}^{\frac{3}{2}})$, mentre è pari a zero nel punto $x_1 = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$, che risulta essere un punto di flesso a tangente obliqua.

(g) (3 punti) Disegna il *grafico* della funzione $f(x)$.

Soluzione:

Mettendo insieme le informazioni ottenute nei punti precedenti è possibile disegnare un grafico qualitativo della funzione.



2. *Problema.* Una maestra sta disponendo in fila tutti i suoi alunni:

$$\{\text{Anna, Barbara, Carlo, Dario, Emma, Franco, Giuseppe, Ilaria, Laura, Mauro}\}$$

(a) (1 punto) Quante sono le possibili file che può formare?

Soluzione:
Le possibili file sono date dalle permutazioni semplici di 10 oggetti (la cardinalità dell'insieme dei suoi alunni):

$$P_{10} = 10! = 3\,628\,800$$

(b) (2 punti) Quante sono le possibili file che può formare in cui Anna è la quarta, dietro Carlo, Dario ed Emma e davanti Barbara, Franco, Giuseppe, Ilaria, Laura e Mauro?

Soluzione:
Queste sono date dal prodotto delle permutazioni semplici di 3 oggetti (Carlo, Dario ed Emma) e di 6 oggetti (Barbara, Franco, Giuseppe, Ilaria, Laura e Mauro):

$$P_3 \cdot P_6 = 3!\,6! = 4320$$

(c) (1 punto) Se la maestra sceglie a caso la disposizione degli alunni in fila, qual è la probabilità che Anna sia la quarta, dietro Carlo, Dario ed Emma e davanti Barbara, Franco, Giuseppe, Ilaria, Laura e Mauro?

Soluzione:

Questa probabilità è data dal rapporto tra casi favorevoli, calcolati al punto (b), e casi possibili, calcolati al punto (a):

$$\frac{P_3 \cdot P_6}{P_10} = \frac{3!\,6!}{10!} = \frac{4320}{3\,628\,800} = \frac{1}{840} \approx 0,12\%$$

3. (4 punti) *Esercizio.* Risolvi la seguente disequazione irrazionale con valore assoluto nell'insieme dei numeri reali:

$$|\,x + \sqrt{x^2+1} - 2\,| < 1$$

Soluzione:

La disequazione con valore assoluto dà luogo ad una coppia di disequazioni messe a sistema:

$$\begin{array}{rcl} -1 < x + & \sqrt{x^2+1} & -2 < 1 \\ 1 - x < & \sqrt{x^2+1} & < 3 - x \end{array}$$

Le soluzioni sono pertanto date da un sistema di due disequazioni irrazionali:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} > 1 - x \\ \sqrt{x^2+1} < 3 - x \end{cases}$$

Le soluzioni della prima disequazione sono determinate dall'unione di due sistemi di due disequazioni ciascuno, mentre quelle della seconda da un sistema di tre disequazioni:

$$\left(\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x^2 + 1 > (1-x)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} 1 - x < 0 \\ x^2 + 1 \geq 0 \end{cases} \right) \cap \begin{cases} x^2 + 1 \geq 0 \\ 3 - x > 0 \\ x^2 + 1 < (3-x)^2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 + 1 > 1 + x^2 - 2x \end{cases} \cup \begin{cases} x > 1 \\ \forall x \in \mathcal{R} \end{cases} \right) \cap \begin{cases} \forall x \in \mathcal{R} \\ x < 3 \\ x^2 + 1 < 9 + x^2 - 6x \end{cases}$$

$$\left(\begin{cases} x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 1 \\ \forall x \in \mathcal{R} \end{cases} \right) \cap \begin{cases} x < 3 \\ x < \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Big((0,1] \;\cup (1,+\infty) \Big) \cap \;(-\infty, 4/3)$$

$$(0,+\infty) \cap \;(-\infty, 4/3)$$

Per cui la disequazione è soddisfatta $\forall x \in (0, 4/3)$.

4. *Problema.* Considera un sistema economico in cui il prezzo p di un certo paniere di beni e servizi di consumo aumenta in modo costante del 6% ogni anno. Questo è esempio di un fenomeno chiamato *inflazione*.

   (a) (2 punti) Calcola la variazione percentuale del prezzo del paniere di beni e servizi di consumo dopo cinque anni.

Soluzione:

Indicando con p_0 il prezzo iniziale del paniere (es. 100 euro) e con p_5 il prezzo dello stesso paniere dopo cinque anni, se il prezzo aumenta di $g = 6\%$ ogni anno, si ha:

$$p_5 = \left(1 + \frac{g}{100}\right)^5 p_0 = 1,06^5\, p_0$$

La variazione percentuale complessiva è pari a:

$$\left(\frac{p_5 - p_0}{p_0}\right) \cdot 100 = \left(\frac{\left(1 + \frac{g}{100}\right)^5 p_0 - p_0}{p_0}\right) \cdot 100 = \left(\left(1 + \frac{g}{100}\right)^5 - 1\right) \cdot 100$$
$$= \left(1,06^5 - 1\right) \cdot 100 \approx 33,8\%$$

I prezzi aumentano pertanto del 34% circa ogni quinquennio.

   (b) (2 punti) In economia il salario reale è dato dal rapporto tra il salario nominale w, cioè il salario espresso in moneta (es. 2500 euro), in un dato momento e il prezzo p del paniere di beni e servizi di consumo nello stesso momento espresso nella stessa valuta (es. 100 euro). Il salario reale è calcolato quindi come w/p (es. $2500/100 = 25$, e questo numero indica che il salario equivale a 25 panieri).
   Sapendo questo e assumendo che il salario nominale w rimanga costante nel tempo mentre il prezzo del paniere p aumenti del 6% ogni anno, calcola la variazione percentuale complessiva del salario reale dopo cinque anni rispetto al momento iniziale.

Soluzione:

Indicando come sopra con p_0 il prezzo iniziale del paniere e con p_5 il prezzo dello stesso paniere dopo cinque anni, la variazione percentuale del salario reale sarà pari a:

$$\left(\frac{\frac{w}{p_5} - \frac{w}{p_0}}{\frac{w}{p_0}}\right) \cdot 100 = \left(\frac{\frac{1}{p_5}}{\frac{1}{p_0}} - 1\right) \cdot 100 = \left(\frac{p_0}{p_5} - 1\right) \cdot 100 = \left(\frac{p_0}{\left(1 + \frac{g}{100}\right)^5 p_0} - 1\right) \cdot 100$$
$$= \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{g}{100}\right)^5} - 1\right) \cdot 100 = \left(\frac{1}{1,06^5} - 1\right) \cdot 100 \approx -25,3\%$$

Il salario reale diminuirà del 25% circa.

Esercizio/Problema:	1	2	3	4	Totale
Punti:	18	4	4	4	30
Punteggio:					