Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

7 Febbraio 2022

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.
Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova. Al termine della prova devi riconsegnare tutti e solo i fogli ricevuti.
Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola. *I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.*

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x$$

(a) (2 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione f.

Soluzione:
La funzione è definita nell'insieme dei numeri reali per ogni valore di x che non rende negativo il radicando della radice quadrata che compare nella funzione, ovvero i valori di x che soddisfano la seguente disequazione:

$$x^2 - 4 \geq 0$$

Questa è una disequazione di secondo grado le cui soluzioni sono: $x \leq -2 \vee x \geq 2$.
Pertanto l'insieme di definizione di f è:

$$Dom(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

(b) (2 punti) Identifica le eventuali simmetrie (funzione *pari* o *dispari*).

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Soluzione:
Anche se il dominio di f è simmetrico rispetto all'origine, la funzione non presenta simmetrie, non essendo né pari, poiché in generale:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x \neq \sqrt{x^2 - 4} + x = f(-x)$$

né dispari, poiché in generale:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x \neq -\sqrt{x^2 - 4} - x = -f(-x)$$

(c) (3 punti) Determina il *segno della funzione* f nel campo di esistenza e le eventuali *intersezioni con gli assi*.

Soluzione:
Il grafico della funzione non interseca l'asse delle ordinate, non essendo questa definita nel punto $x = 0$, e neanche l'asse delle ascisse, poiché l'equazione $\sqrt{x^2 - 4} = x$ non ha soluzioni reali.
La disequazione:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x < 0$$

è soddisfatta per quei valori di x che soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x > 0 \\ x^2 - 4 < x^2 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x > 0 \\ \forall x \in \mathcal{R} \end{cases}$$

da cui $x \geq 2$. Il grafico della funzione riposa pertanto nel quarto quadrante (ascisse positive e ordinate negative) per $x \geq -2$ e nel secondo quadrante (ascisse negative e ordinate positive) per $x \leq -2$, non essendo definita per $-2 < x < 2$.

(d) (2 punti) Determina gli eventuali *asintoti verticali*.

Soluzione:
Non esistono valori finiti di x al cui tendere $f(x)$ ha limite infinito, per cui non esistono asintoti verticali.
Nei punti di frontiera del dominio $x = -2$ e $x = 2$, la funzione è definita e si ha:

$$\lim_{x \to -2^-} \left(\sqrt{x^2 - 4} - x \right) = f(-2) = 2$$

$$\lim_{x \to 2^+} \left(\sqrt{x^2 - 4} - x \right) = f(2) = -2$$

(e) (2 punti) Calcola i limiti di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ e determina gli eventuali *asintoti orizzontali*.

Soluzione:
Il limite per $x \to +\infty$ di f esiste ed è finito. Di fatto sostituendo si arriva alla forma di indecisione $+\infty - \infty$. È tuttavia possibile riesprimere la funzione come segue:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-4}+x}{\sqrt{x^2-4}+x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} = \frac{-4}{+\infty+\infty} = 0^-$$

L'asse delle ascisse risulta pertanto l'asintoto orizzontale destro della funzione.
L'asintoto orizzontale sinistro invece non esiste, essendo infinito il limite per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right) = +\infty-(-\infty) = +\infty+\infty = +\infty$$

(f) (3 punti) Calcola la *derivata prima* $f'(x)$ e determina i valori per cui $f(x)$ è *crescente/decrescente* e gli eventuali *punti stazionari* studiando il segno di questa derivata.

Soluzione:
Applicando la regola della derivata della somma di funzioni si ha:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2-4\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = \frac{1}{2\sqrt{x^2-4}}\frac{\mathrm{d}\,x^2}{\mathrm{d}x} - 1$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 1$$

Per studiare il segno, possiamo riesprimere la derivata come segue:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 1 = -\frac{\sqrt{x^2-4}-x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2-4}}$$

Il denominatore nei punti interni del dominio di f è sempre positivo, per cui il segno è deciso dal numeratore. Questo sarà negativo quando $f(x)$ è positiva, e viceversa.
Per cui $f'(x) < 0$ (f è decrescente in senso stretto) nell'intervallo $(-\infty, -2)$ e $f'(x) > 0$ (f è crescente in senso stretto) nell'intervallo $(2, +\infty)$.
Non esistono valori di x che annullano la derivata, per cui non ci sono punti stazionari.

(g) (3 punti) Calcola la *derivata seconda* $f''(x)$ e determina la *concavità/convessità* di $f(x)$ e gli eventuali *punti di flesso*, studiando il segno di tale derivata.

Soluzione:

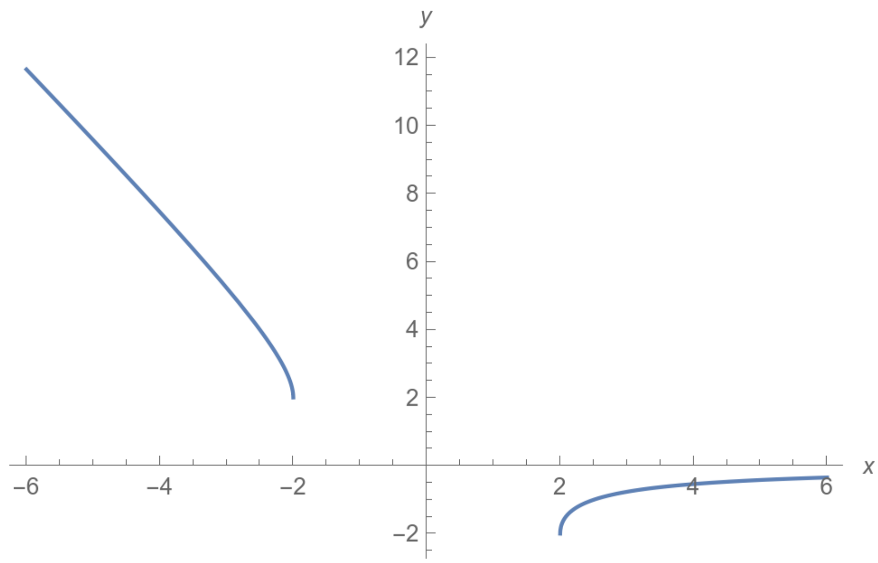
Derivando due volte la funzione si ottiene:

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 1\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2-4} - x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2-4}}{x^2-4}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2-4} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{(x^2-4)^3}} = \frac{-4}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$$

Nei punti interni del dominio della funzione il denominatore è sempre positivo, per cui il segno è deciso dal numeratore. Essendo questo sempre negativo, la funzione è globalmente concava e non presenta punti di flesso.

(h) (3 punti) Disegna il *grafico* della funzione $f(x)$.

Soluzione:
Mettendo insieme le informazioni ottenute nei punti precedenti è possibile disegnare un grafico della funzione.



2. *Problema.* Stai organizzando un torneo di pallavolo in cui è prevista la partecipazione di trenta squadre e devi prenotare in anticipo il campo per tutto il torneo.

(a) (2 punti) Quante partite è necessario organizzare, e quindi quante prenotazioni devi fare, per far sì che ognuna delle squadre partecipanti al torneo affronti ciascuna delle altre squadre esattamente una volta?

Soluzione:
Le prenotazioni da effettuare sono pari alle combinazioni semplici di 30 elementi di classe 2:

$$C_{30,2} = \binom{30}{2} = \frac{30!}{2!\,(30-2)!} = \frac{30 \times 29}{2} = 435$$

(b) (2 punti) Supposto che è previsto un solo incontro il mercoledì sera di ogni settimana e che non ci sono vincoli rispetto all'ordine in cui i diversi incontri possono tenersi, quante possibilità hai di fronte quando decidi la calendarizzazione dei diversi incontri?

Soluzione:
Il numero di possibilità è dato dalle permutazioni semplici di 435 oggetti:

$$P_{435} = 435! \approx 3.49 \cdot 10^{960}$$

3. *Problema.* In finanza, il rapporto prezzo-utili (P/E, *Price/Earnings*) è il rapporto tra il prezzo di un'azione sul mercato e gli utili per azione. Così, ad esempio, se dal bilancio della società per azioni Sigma risulta un utile di 5.000 euro ed esistono 10.000 azioni di questa società, l'utile per azione è di 0,5 euro. Se il prezzo di un'azione della stessa società sul mercato è di 5 euro, il P/E per le azioni della società Sigma risulta pari a $5/0,5 = 10$.

(a) (3 punti) Sapendo questo, se il prezzo dell'azione di una società aumenta ogni anno del 8%, mentre gli utili per azione della stessa società aumentano del 5% l'anno, dopo 10 anni qual è la variazione percentuale del P/E dell'azione rispetto al momento iniziale?

Soluzione:
Indicando con E_0 gli utili per azione iniziali e con E_{10} il livello degli stessi utili dopo 10 anni, se questi crescono al tasso $g_E = 5\%$ l'anno, si ha:

$$E_{10} = \left(1 + \frac{g_E}{100}\right)^{10} E_0 = 1,05^{10} E_0$$

Analogamente, indicando con P_0 il prezzo iniziale e con P_{10} il prezzo dopo 10 anni, se questo cresce al tasso $g_P = 8\%$ l'anno, si ha:

$$P_{10} = \left(1 + \frac{g_P}{100}\right)^{10} P_0 = 1,08^{10} P_0$$

La variazione percentuale del P/E sarà pertanto pari a:

$$\left(\frac{\frac{P_{10}}{E_{10}} - \frac{P_0}{E_0}}{\frac{P_0}{E_0}}\right) \cdot 100 = \left(\frac{\frac{\left(1+\frac{g_P}{100}\right)^{10}}{\left(1+\frac{g_E}{100}\right)^{10}} \frac{P_0}{E_0}}{\frac{P_0}{E_0}} - 1\right) \cdot 100 = \left(\left(\frac{1 + \frac{g_P}{100}}{1 + \frac{g_E}{100}}\right)^{10} - 1\right) \cdot 100$$

$$= \left(\left(\frac{1,08}{1,05}\right)^{10} - 1\right) \cdot 100 \approx \left(1,02857^{10} - 1\right) \cdot 100 \approx 32,5\%$$

Nota: la variazione percentuale del rapporto ogni anno è all'incirca pari al 3%, che è la differenza tra la variazione percentuale del numeratore (8%) e la variazione percentuale del denominatore (5%). Questa approssimazione non è buonissima in questo caso (la variazione percentuale annuale effettiva è pari a $1,08/1,05 - 1 \approx 2,86\%$), avendo a che fare con variazioni e differenze di variazioni percentuali relativamente grandi.

(b) (3 punti) È possibile calcolare anche il rapporto prezzo-utili di un portafoglio (paniere) di azioni. Questo è dato dal rapporto tra il valore di mercato di questo portafoglio e gli utili complessivi collegati a queste azioni. Esempio: se ho un portafoglio composto da 100 azioni della società A ($n_A = 100$), con prezzo P_A pari a 10 euro, e 200 azioni della società B ($n_B = 200$), con prezzo P_B di 2 euro, e se gli utili per azione di A (E_A) sono pari a 1 euro mentre quelli di B (E_B) uguali a 0,1 euro, il P/E del mio portafoglio sarà:

$$\frac{n_A P_A + n_B P_B}{n_A E_A + n_B E_B} = \frac{100 \cdot 10 + 200 \cdot 2}{100 \cdot 1 + 200 \cdot 0,1} = \frac{1400}{120} \approx 11,7$$

Sapendo questo, assumi che il tuo portafoglio sia composto solo da azioni di due società. In particolare, ai prezzi attuali possiedi 1.000 euro di azioni della società C e 1.000 euro di azioni della società D. Se l'azione C ha un P/E di 12 e l'azione D un P/E di 60, qual è il P/E del tuo portafoglio?

Soluzione:
Conoscendo il rapporto prezzo-utili di ciascuna azione è possibile esprimere gli utili per azione in funzione del prezzo, e si ha quindi:

$$E_C = \frac{P_C}{12} \qquad\qquad E_D = \frac{P_D}{60}$$

Sostituendo nella formula per il calcolo del P/E del portafoglio si ottiene:

$$\frac{n_C P_C + n_D P_D}{n_C E_C + n_D E_D} = \frac{n_C P_C + n_D P_D}{\frac{n_C P_C}{12} + \frac{n_D P_D}{60}} = \frac{\frac{n_C P_C}{n_D P_D} + 1}{\frac{n_C P_C}{n_D P_D} \frac{1}{12} + \frac{1}{60}}$$

Sapendo che $n_C P_C = n_D P_D = 1000$ euro, si ottiene infine:

$$\frac{1+1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{5+1}{60}} = \frac{60}{3} = 20$$

Esercizio/Problema:	1	2	3	Totale
Punti:	20	4	6	30
Punteggio:				