Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

8 Giugno 2022

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.
Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova. Al termine della prova devi riconsegnare tutti e solo i fogli ricevuti.
Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola. *I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.*

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$:

$$f(x) = 100\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{100}}\right)$$

   (a) (2 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione f.

Soluzione:
La funzione è definita per ogni valore di x che non rende nullo il denominatore della frazione, ovvero

$$\begin{aligned} 1 + \frac{x}{100} &\neq 0 \\ x &\neq -100 \end{aligned}$$

L'insieme di definizione di f è l'insieme dei numeri reali diversi da -100:

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -100) \cup (-100, +\infty).$$

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

(b) (2 punti) Indicando con A l'insieme di definizione di f individuato al punto precedente, determina: i) l'insieme dei *punti interni* di A; ii) l'insieme dei *punti esterni* di A; iii) l'insieme dei *punti di frontiera* di A; iv) l'*insieme complementare* di A; v) l'*insieme derivato* di A. Inoltre stabilisci se l'insieme complementare di A è un insieme *aperto*, *chiuso* o né aperto né chiuso.

Soluzione:
L'insieme dei punti interni di A coincide con A (e da questo segue che A è un insieme aperto):
$$\mathrm{Int}(A) = A = (-\infty, -100) \cup (-100, +\infty)$$
Non esistono punti esterni ad A:
$$\mathrm{Ext}(A) = \emptyset$$
L'unico punto di frontiera è il punto -100, per cui l'insieme dei punti di frontiera di A è il singoletto:
$$\partial A = \{-100\}$$
Questo è anche l'insieme complementare di A:
$$A^c = \mathcal{R} \setminus A = \{-100\}$$
Questo insieme è chiuso, poiché è costituito da un unico punto isolato, e quindi non esistono suoi punti di accumulazione che non appartengono all'insieme.
Poiché al contrario A non contiene punti isolati, l'insieme derivato di A è dato dall'unione di A con la sua frontiera:
$$A' = A \cup \partial A = (-\infty, +\infty)$$
L'insieme derivato di A è pertanto l'insieme dei numeri reali.

(c) (2 punti) Identifica le eventuali simmetrie (funzione *pari* o *dispari*).

Soluzione:
Non essendo il dominio di f simmetrico rispetto all'origine, la funzione non può essere né pari né dispari.

(d) (3 punti) Determina il *segno della funzione* f ($f(x) \geq 0$) nel campo di esistenza e le eventuali *intersezioni con gli assi*.

Soluzione:
La funzione risulta essere una funzione omografica, che è possibile esprimere nella forma normale come segue:
$$f(x) = 100\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{100}}\right) = 100\left(1 - \frac{100}{100 + x}\right) = \frac{100\,x}{x + 100}$$

Il grafico di questa funzione è pertanto un'iperbole equilatera con centro di simmetria di coordinate $C = (-100, 100)$.
Il grafico della funzione passa per l'origine degli assi, poiché si ha:

$$f(0) = 0$$

Questo è anche l'unico punto di intersezione con gli assi. La funzione è negativa nell'intervallo $(-100, 0)$.

(e) (2 punti) Determina gli eventuali *asintoti verticali.*

Soluzione:
Come qualunque funzione omografica, $f(x)$ avrà un asintoto verticale che passa per il centro di simmetria. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -100^+} \frac{100\,x}{x+100} &= \frac{-10.000}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \to -100^-} \frac{100\,x}{x+100} &= \frac{-10.000}{0^-} = +\infty \end{aligned}$$

(f) (2 punti) Calcola i limiti di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ e determina gli eventuali *asintoti orizzontali.*

Soluzione:
Come qualunque funzione omografica, $f(x)$ avrà un asintoto orizzontale che passa per il centro di simmetria. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{100\,x}{x+100} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{100}{1 + \frac{100}{x}} = 100^- \\ \lim_{x \to -\infty} \frac{100\,x}{x+100} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{100}{1 + \frac{100}{x}} = 100^+ \end{aligned}$$

(g) (3 punti) Calcola la *derivata prima* $f'(x)$ e determina i valori per cui $f(x)$ è *crescente/decrescente* e gli eventuali *punti stazionari* studiando il segno di questa derivata.

Soluzione:
Applicando la regola della derivata di un rapporto si ha:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{100\,x}{x+100}\right) = \frac{100(x+100) - 100x}{(x+100)^2} = \frac{10.000}{(x+100)^2}$$

Questa derivata è sempre positiva per cui la funzione f non presenta punti stazionari ed è crescente in senso stretto nel dominio.

(h) (3 punti) Calcola la *derivata seconda* $f''(x)$ e determina la *concavità/convessità* di $f(x)$ e gli eventuali *punti di flesso*, studiando il segno di tale derivata.

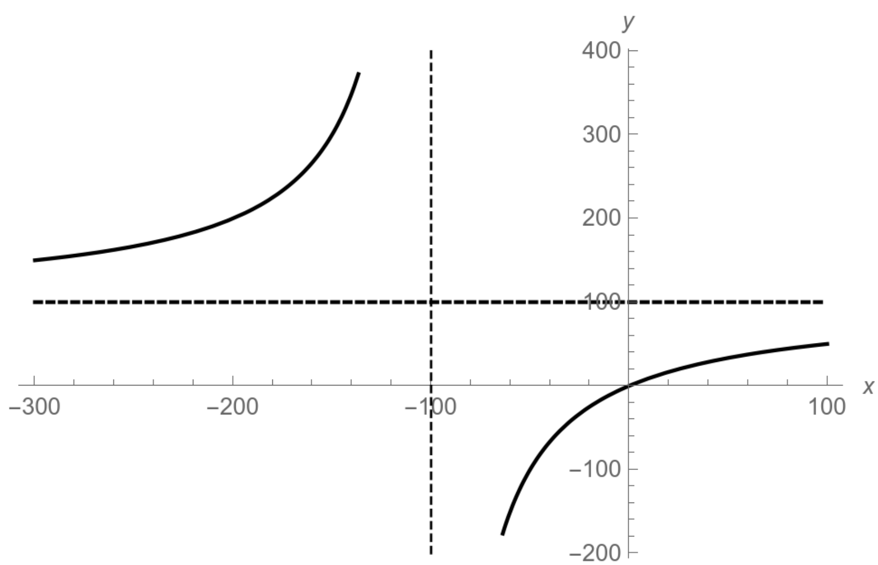
Soluzione:
Derivando due volte la funzione si ottiene:

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{10.000}{(x+100)^2} = 10.000\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+100)^{-2} = \frac{-20.000}{(x+100)^3}$$

Il numeratore è sempre negativo, per cui il segno è deciso dal denominatore. Questo è negativo (e pertanto la derivata seconda positiva) per $x < -100$.
La funzione f è quindi strettamente convessa (concava) per $x < -100$ ($x > -100$), ma non presenta punti di flesso, non essendo definita per $x = -100$.

(i) (2 punti) Disegna il *grafico* della funzione $f(x)$.

Soluzione:
Mettendo insieme le informazioni ottenute nei punti precedenti è possibile disegnare un grafico qualitativo della funzione.



2. *Problema.* Una newsletter a cui sei iscritto ti invia il seguente messaggio promozionale:

Siamo fuori di IVA! -22% di sconto su tutto in negozio e online, ma solo fino al 12/06.

Lo sconto applicato è in realtà diverso da quello necessario per azzerare l'IVA del 22% sui prodotti.

(a) (2 punti) A quanto dovrebbe ammontare lo sconto in percentuale sul prezzo finale di vendita per azzerare l'IVA del 22% sui prodotti? Lo sconto applicato sui prodotti (22% di sconto sul prezzo finale di vendita) è quindi in realtà maggiore o minore di quello necessario per azzerare l'IVA?

Soluzione:
Indicando con p_1 il prezzo finale di vendita (al lordo dell'IVA) e con p_0 il prezzo prima dell'imposizione dell'IVA (al netto dell'IVA), affinché lo sconto in percentuale s sia tale da azzerare l'IVA (indicata con t in percentuale) deve aversi:

$$\begin{aligned}
p_1\left(1-\frac{s}{100}\right) &= p_0\\
p_0\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1-\frac{s}{100}\right) &= p_0\\
\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1-\frac{s}{100}\right) &= 1\\
1-\frac{s}{100} &= \frac{1}{1+\frac{t}{100}}\\
s &= 100\left(1-\frac{1}{1+\frac{t}{100}}\right)\\
s &= \frac{100\,t}{100+t}
\end{aligned}$$

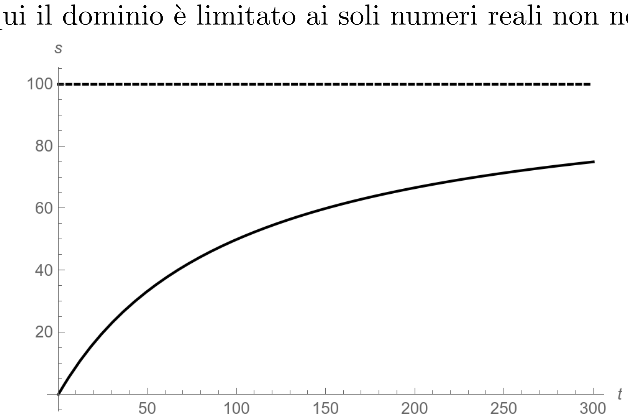
Con aliquota IVA al 22% si ha quindi $s \approx 18\%$.
Lo sconto necessario ad azzerare l'IVA è quindi minore di quello applicato.

(b) (2 punti) Determina la funzione che associa ad ogni aliquota IVA t (es. 20%, 21%, ecc.) lo sconto in percentuale s che è necessario applicare per annullare l'IVA.

Soluzione:
La funzione è stata determinata nella soluzione al punto precedente:

$$s(t) = \frac{100\,t}{100+t}$$

Va notato che questa funzione è la medesima funzione studiata nell'Esercizio 1. L'unica differenza è che qui il dominio è limitato ai soli numeri reali non negativi.'



(c) (2 punti) A quanto dovrebbe ammontare l'aliquota IVA perché uno sconto del 22% sul prezzo finale di vendita lo azzeri? Dovrebbe essere maggiore o minore del 22%?

Soluzione:
Per calcolarla è possibile calcolare l'inversa della funzione determinata al punto precedente:

$$\begin{aligned} \frac{100\,t}{100+t} &= s \\ 100\,t &= (100+t)s \\ 100\,t - s\,t &= 100s \\ t &= \frac{100s}{100-s} \end{aligned}$$

Con $s = 22$ si ha $t \approx 28,2\%$. L'aliquota IVA dovrebbe quindi essere il 28% circa, maggiore del 22%.

3. (3 punti) *Problema.* La dama è un gioco da tavolo tradizionale per due giocatori. Ognuno dei due giocatori all'inizio del gioco ha a disposizione dodici pedine identiche dello stesso colore, bianco e nero. Quanti sono i modi diversi in cui è possibile ordinare tutte le pedine?

Soluzione:
I modi diversi di ordinare le pedine possono essere determinati calcolando le permutazioni con ripetizione di 12 + 12 oggetti:

$$P'_{12,12} = \frac{24!}{12!\,12!} = 2.704.156$$

Esercizio/Problema:	1	2	3	Totale
Punti:	21	6	3	30
Punteggio:				