Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

5 Luglio 2022

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.
Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova. Al termine della prova devi riconsegnare tutti e solo i fogli ricevuti.
Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola. *I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.*

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$:

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

dove ln è il logaritmo naturale (base e).

(a) (2 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione f.

Soluzione:
La funzione è definita per ogni valore di x che rende strettamente positivo l'argomento del logaritmo, ovvero:

$$x + \sqrt{x^2+1} > 0$$

Questa è una disequazione irrazionale con radice ad indice pari, che nella forma normale diventa:

$$\sqrt{x^2+1} > -x$$

Le soluzioni sono date da:

$$\begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2+1 > (-x)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} -x < 0 \\ x^2+1 \geq 0 \end{cases}$$

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ \forall x \in \mathcal{R} \end{cases} \cup \begin{cases} x > 0 \\ \forall x \in \mathcal{R} \end{cases}$$

La disequazione è pertanto soddisfatta $\forall x \in \mathcal{R}$ e l'insieme di definizione di f è l'insieme dei numeri reali ($x \in \mathcal{R}$).

(b) (3 punti) Identifica le eventuali simmetrie (funzione *pari* o *dispari*).

Soluzione:
Il dominio di f è simmetrico rispetto all'origine. La funzione non è pari, poiché si ha:

$$f(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{(-x)^2+1}\right) = \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

che è in generale diverso da $f(x)$ escluso il caso in cui $x = 0$.
Perché la funzione sia dispari deve invece aversi che:

$$-f(-x) = -\ln\left(-x + \sqrt{(-x)^2+1}\right) = \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right)^{-1} = \ln\left(\frac{1}{-x + \sqrt{x^2+1}}\right)$$

sia in generale uguale a $f(x)$.
Affinché questo accada, la seguente eguaglianza deve essere soddisfatta per ogni x:

$$\ln\left(\frac{1}{-x + \sqrt{x^2+1}}\right) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

L'argomento del primo logaritmo è sempre positivo poiché $-x + \sqrt{x^2+1} > 0$ è soddisfatta per ogni x e pertanto l'eguaglianza si riduce a:

$$\frac{1}{-x + \sqrt{x^2+1}} = x + \sqrt{x^2+1}$$

Ed effettivamente si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1 - (\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)}{-x + \sqrt{x^2+1}} &= 0 \\ \frac{1 - (x^2+1) + x^2}{-x + \sqrt{x^2+1}} &= 0 \\ \frac{0}{-x + \sqrt{x^2+1}} &= 0 \end{aligned}$$

che, essendo il denominatore sempre diverso da 0, è soddisfatta per ogni x, e f è quindi dispari.

(c) (3 punti) Determina il *segno della funzione* f ($f(x) \geq 0$) nel campo di esistenza e le eventuali *intersezioni con gli assi*.

Soluzione:
La funzione interseca l'asse delle ordinate nell'origine degli assi poiché si ha:

$$f(0) = \ln\left(0 + \sqrt{0^2+1}\right) = \ln 1 = 0$$

Per studiare il segno di f consideriamo la corrispondente disequazione irrazionale logaritmica:

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \geq 0$$

da cui:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2+1} &\geq 1 \\ \sqrt{x^2+1} &\geq 1-x \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono date da:

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x^2+1 \geq (1-x)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} 1-x < 0 \\ x^2+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x^2+1 \geq 1+x^2-2x \end{cases} \cup \begin{cases} x > 1 \\ \forall x \in \mathcal{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 1 \\ \forall x \in \mathcal{R} \end{cases}$$

cioè $x \geq 0$.
Per cui il grafico di f riposa nel primo e terzo quadrante del piano cartesiano e passa per l'origine degli assi.

(d) (2 punti) Determina gli eventuali *asintoti verticali*.

Soluzione:
Non esistono valori finiti di x al cui tendere $f(x)$ ha limite infinito, per cui non esistono asintoti verticali.

(e) (3 punti) Calcola i limiti di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ e determina gli eventuali *asintoti orizzontali*.

Soluzione:
Il limite per $x \to +\infty$ di f esiste ed è infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \ln(+\infty+\infty) = \ln(+\infty) = +\infty$$

Essendo la funzione dispari, il limite per $x \to -\infty$ è $-\infty$.

> *Nota*: Questo è anche possibile capirlo notando che l'argomento del logaritmo naturale tende a 0 per eccesso:
>
> $$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left((x+\sqrt{x^2+1})\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$
> $$= \frac{-1}{-\infty} = 0^+$$
>
> per cui il logaritmo naturale tende a $-\infty$.
> f pertanto non presenta asintoti orizzontali.

(f) (3 punti) Calcola la *derivata prima* $f'(x)$ e determina i valori per cui $f(x)$ è *crescente/decrescente* e gli eventuali *punti stazionari* studiando il segno di questa derivata.

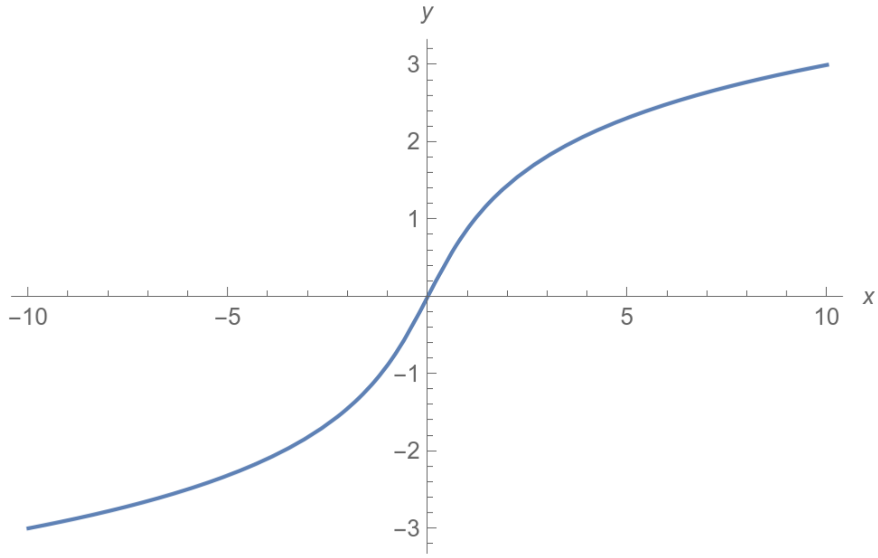
> **Soluzione:**
> Applicando la regola della derivata di una funzione composta si ha:
>
> $$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$
> $$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
>
> Questa derivata è sempre positiva per cui f non presenta punti stazionari ed è crescente in senso stretto nel dominio.

(g) (3 punti) Calcola la *derivata seconda* $f''(x)$ e determina la *concavità/convessità* di $f(x)$ e gli eventuali *punti di flesso*, studiando il segno di tale derivata.

> **Soluzione:**
> Derivando due volte la funzione si ottiene:
>
> $$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{-1} = -\frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2+1} = -\frac{1}{x^2+1}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$
> $$= \frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$
>
> Il denominatore è sempre positivo, per cui il segno è deciso dal numeratore. Questo è positivo per $x<0$. f è quindi strettamente concava (convessa) per $x>0$ ($x<0$) e il punto $x_0=0$ è un punto di flesso.
> In particolare x_0 è un punto di flesso a tangente obliqua, poiché il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione nel punto ha valore pari ad 1:
>
> $$f'(0) = \frac{1}{\sqrt{0^2+1}} = 1$$

(h) (3 punti) Disegna il *grafico* della funzione $f(x)$.

Soluzione:
Mettendo insieme le informazioni ottenute nei punti precedenti è possibile disegnare un grafico qualitativo della funzione.



2. *Problema.* Un allenatore di calcio adotta il modulo 4-4-2, che consiste nello schierare, oltre a 1 portiere, 4 difensori, 4 centrocampisti e 2 attaccanti. Questo allenatore ha a disposizione 2 portieri, 10 difensori, 6 centrocampisti e 3 attaccanti.

   (a) (3 punti) Quante formazioni diverse può formare, considerando una formazione diversa solo per l'identità dei giocatori titolari e non per gli specifici ruoli assegnati (es. un determinato difensore potrebbe giocare come terzino destro oppure sinistro; un centrocampista potrebbe ricoprire il ruolo di ala destra, di mediano, ecc.).

   Soluzione:
   $$\begin{aligned} C_{2,1} \cdot C_{10,4} \cdot C_{6,4} \cdot C_{3,2} &= \binom{2}{1} \cdot \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{3}{2} = 2 \cdot \frac{10!}{4!\,(10-4)!} \cdot \frac{6!}{4!\,(6-4)!} \cdot 3 \\ &= 2 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{24} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{24} \cdot 3 = 2 \cdot 210 \cdot 15 \cdot 3 = 18.900 \end{aligned}$$

   (b) (2 punti) Considerando equiprobabile ogni formazione, qual è la probabilità di indovinare la formazione di fatto messa in campo con 100 tentativi.

   Soluzione:
   $$\mathrm{Pr} = \frac{100}{C_{2,1} \cdot C_{10,4} \cdot C_{6,4} \cdot C_{3,2}} = \frac{100}{18.900} = \frac{1}{189} \approx 0,00529$$
   La probabilità è pari a circa lo 0,53%.

3. (3 punti) *Problema.* Nella "Nota trimestrale sulle tendenze dell'occupazione" leggi che in Italia nel secondo trimestre 2020, rispetto al primo, l'occupazione è diminuita del 2% (pari a −459mila

unità). Sapendo questo, a quanto ammontano gli occupati totali all'inizio del terzo trimestre?

Soluzione:

Indicando con o_t gli occupati all'inizio del trimestre t, si ha:

$$\frac{o_3 - o_2}{o_2} = \frac{-459}{o_2} = -0.02$$

da cui:

$$o_2 = \frac{-459}{-0.02} = 22.950$$

Per calcolare gli occupati totali all'inizio del terzo trimestre è sufficiente sommare la variazione assoluta nel secondo trimestre:

$$o_3 = o_2 + (o_3 - o_2) = 22.950 - 459 = 22.491$$

Gli occupati totali all'inizio del terzo trimestre 2020 in Italia erano pari a circa 22 milioni e mezzo.

Esercizio/Problema:	1	2	3	Totale
Punti:	22	5	3	30
Punteggio:				