Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

19 Settembre 2022

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.
Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova. Al termine della prova devi riconsegnare tutti e solo i fogli ricevuti.
Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola. *I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.*

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$:

$$f(x) = 10^{\frac{1}{x}}$$

(a) (2 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione f.

Soluzione:
La funzione è definita per ogni valore di x che non rende nullo il denominatore della frazione all'esponente, ovvero $x = 0$. L'insieme di definizione è quindi $\mathcal{R} \backslash \{0\}$.

(b) (2 punti) Identifica le eventuali simmetrie (funzione *pari* o *dispari*).

Soluzione:
Anche se il dominio di f è simmetrico rispetto all'origine, la funzione non è pari, poiché in generale:

$$f(-x) = 10^{\frac{1}{-x}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{x}}} \neq 10^{\frac{1}{x}} = f(x)$$

e non è dispari, poiché in generale:

$$-f(-x) = -\frac{1}{10^{\frac{1}{x}}} \neq 10^{\frac{1}{x}} = f(x)$$

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

(c) (2 punti) Determina il *segno della funzione* f ($f(x) \geq 0$) nel campo di esistenza e le eventuali *intersezioni con gli assi.*

Soluzione:
Si tratta di una funzione in cui l'incognita compare solo all'esponente e come tale è strettamente positiva. Il grafico pertanto non presenta punti di intersezione con l'asse delle ascisse.
Inoltre, non essendo f definita per $x = 0$, il grafico non interseca l'asse delle ordinate.

(d) (2 punti) Determina gli eventuali *asintoti verticali.*

Soluzione:
La funzione non è definita per $x = 0$, ma il limite destro di f per x che tende a 0 esiste ed è infinito:

$$\lim_{x\to0^+} 10^{\frac{1}{x}} = 10^{+\infty} = +\infty$$

per cui $x = 0$ è un asintoto verticale destro.
Al contrario, il limite sinistro di f per x che tende a 0 esiste ma è finito:

$$\lim_{x\to0^-} 10^{\frac{1}{x}} = 10^{-\infty} = 0$$

(e) (3 punti) Calcola i limiti di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ e determina gli eventuali *asintoti orizzontali.*

Soluzione:
Il limite per $x \to +\infty$ di f esiste ed è finito:

$$\lim_{x\to+\infty} 10^{\frac{1}{x}} = 10^{0^+} = 1^+$$

e coincide con quello per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} 10^{\frac{1}{x}} = 10^{0^-} = 1^-$$

per cui $y = 1$ è l'asintoto orizzontale bilatero di f.

(f) (3 punti) Calcola la *derivata prima* $f'(x)$ e determina i valori per cui $f(x)$ è *crescente/decrescente* e gli eventuali *punti stazionari* studiando il segno di questa derivata.

Soluzione:
Applicando la regola della derivata di una funzione composta si ha:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}10^{\frac{1}{x}} = 10^{\frac{1}{x}} \ln 10 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-1} = 10^{\frac{1}{x}} \ln 10 \left(-x^{-2}\right) = -\frac{10^{\frac{1}{x}} \ln 10}{x^2} = \frac{-\ln 10 \cdot f(x)}{x^2}$$

Nel dominio della funzione, il denominatore è sempre positivo, per cui il segno è deciso dal numeratore. $10^{\frac{1}{x}}$ è sempre positivo. Essendo $-\ln 10 \approx -2,3$ un numero negativo, il numeratore è sempre negativo.

La derivata è quindi sempre negativa e pertanto f non presenta punti stazionari ed è decrescente in senso stretto nel dominio.

(g) (3 punti) Calcola la *derivata seconda* $f''(x)$ e determina la *concavità/convessità* di $f(x)$ e gli eventuali *punti di flesso*, studiando il segno di tale derivata.

Soluzione:

Derivando due volte la funzione si ottiene:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{-\ln 10 \cdot f(x)}{x^2} = -\ln 10 \frac{f'(x)x^2 - f(x)(2x)}{x^4} = \frac{\ln 10}{x^4}\Big(\ln 10\, f(x) + 2x f(x)\Big) \\ &= \frac{f(x)\ln 10}{x^4}\left(\ln 10 + 2x\right) \end{aligned}$$

Essendo $\frac{f(x)\ln 10}{x^4}$ sempre definito e positivo nel dominio di f, il segno è deciso dal secondo fattore:

$$\begin{aligned} \ln 10 + 2x &\geq 0 \\ x &\geq -\frac{\ln 10}{2} \approx -1,15 \end{aligned}$$

La derivata seconda è pertanto positiva per $x > x_0 = -\frac{\ln 10}{2}$. f è quindi strettamente concava (convessa) per $x < x_0$ ($x > x_0$) e il punto x_0 è un punto di flesso.

x_0 è un punto di flesso a tangente obliqua. Il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione nel punto ha valore pari a:

$$\begin{aligned} f'\left(-\frac{\ln 10}{2}\right) &= -\frac{10^{\frac{1}{\left(-\frac{\ln 10}{2}\right)}}\ln 10}{\left(-\frac{\ln 10}{2}\right)^2} = -\frac{10^{-\frac{2}{\ln 10}}}{\frac{\ln 10}{4}} = \frac{-4}{\left(10^{\frac{1}{\ln 10}}\right)^2 \ln 10} = \\ &= \frac{-4}{\left(10^{\log_{10} \mathrm{e}}\right)^2 \ln 10} = \frac{-4}{\mathrm{e}^2 \ln 10} \approx -0,24 \end{aligned}$$

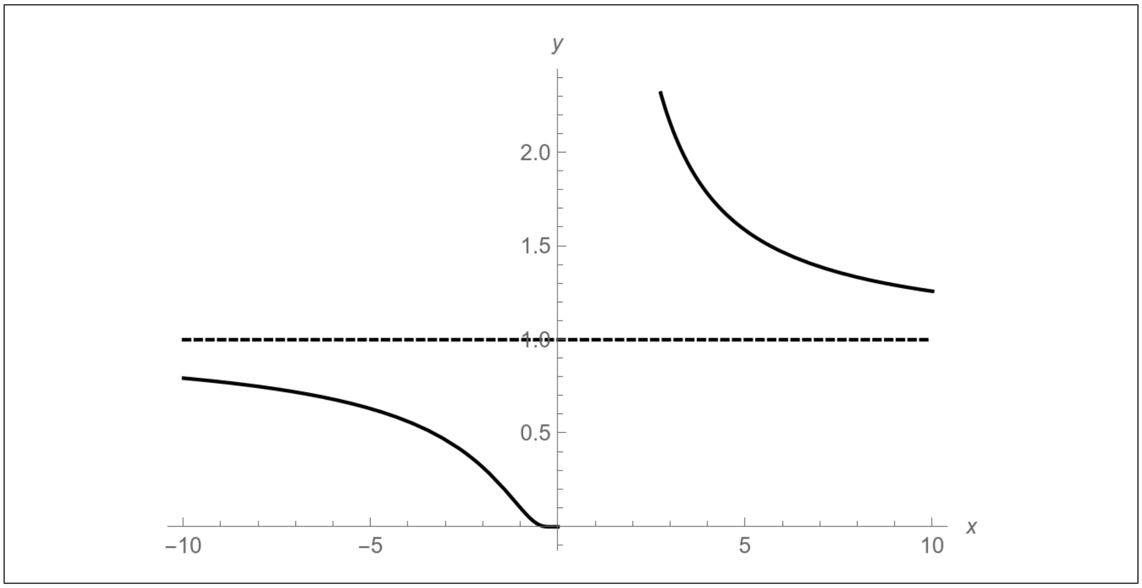
L'ordinata del punto di flesso è pari a:

$$f\left(-\frac{\ln 10}{2}\right) = 10^{\frac{1}{\left(-\frac{\ln 10}{2}\right)}} = \left(10^{\frac{1}{\ln 10}}\right)^{-2} = \left(10^{\log_{10} \mathrm{e}}\right)^{-2} = \frac{1}{\mathrm{e}^2} \approx 0,135$$

(h) (3 punti) Disegna il *grafico* della funzione $f(x)$.

Soluzione:

Mettendo insieme le informazioni ottenute nei punti precedenti è possibile disegnare un grafico qualitativo della funzione.



2. *Problema.* Quali sono le potenze a cui è possibile elevare il numero 10 affinché il risultato sia:
   (a) (2 punti) un numero compreso tra 5 e 10, estremi esclusi?

Soluzione:
Per calcolarle occorre risolvere il seguente sistema di disequazioni esponenziali:

$$\begin{cases} 10^x > 5 \\ 10^x < 10 \end{cases}$$

ovvero in forma compatta:

$$5 < 10^x < 10$$

da cui, applicando la definizione di logaritmo e ricordando che, essendo la base maggiore di 1, il verso delle diseguaglianze non cambia, segue:

$$\begin{aligned} \log_{10} 5 &< x < \log_{10} 10 \\ 0,7 \approx \log_{10} 5 &< x < 1 \end{aligned}$$

Pertanto le potenze sono quelle comprese tra 0,7 e 1.

   (b) (2 punti) un numero compreso tra 1 e 5, estremi inclusi?

Soluzione:
Per calcolarle occorre risolvere il seguente sistema di disequazioni esponenziali:

$$1 \leq 10^x \leq 5$$

da cui segue:

$$\begin{aligned} \log_{10} 1 &\leq x \leq \log_{10} 5 \\ 0 &\leq x \leq \log_{10} 5 \approx 0,7 \end{aligned}$$

Figura 1: Un esempio di rete non diretta con 100 nodi

Pertanto le potenze sono quelle comprese tra 0 e (circa) 0,7.

3. *Problema.* Un rete è definita da due insiemi: l'insieme dei nodi che compongono la rete $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ e l'insieme delle connessioni bilaterali tra questi nodi (es. $E = \big\{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \ldots\big\}$). Per esempio, i nodi della rete potrebbero rappresentare gli studenti di un corso universitario e le connessioni i rapporti di amicizia tra questi studenti. In questa rete esiste un collegamento tra il nodo/studente 1 e il nodo/studente 3 se questi studenti sono amici. La Figura 1 mostra un esempio di rete (*undirected network*) composta da 100 nodi.

   (a) (2 punti) Dati 100 nodi, qual è il numero massimo di collegamenti che possono esistere tra questi nodi, cioè il numero di collegamenti che si avrebbero se ogni nodo fosse collegato ad ognuno degli altri (*complete network*)? Nell'esempio, il numero delle diverse relazioni di amicizia se ognuno dei 100 studenti fosse amico di ciascuno degli altri?

   Soluzione:
   Il numero è dato dalle combinazioni semplici di 100 elementi di classe 2:

   $$C_{100,2} = \binom{100}{2} = \frac{100!}{2!\,(100-2)!} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4\,950$$

   (b) (2 punti) Dati sempre i 100 nodi, qual è il numero di possibili reti, considerando il caso in cui nessuno studente sia amico di qualche altro studente (*empty network*), quello in cui ciascuno studente sia amico di tutti gli altri (*complete network*) e tutti i casi possibili tra questi due estremi.

Soluzione:
Considerando l'insieme dei collegamenti nel caso di rete completa, E_c, il numero delle reti possibili sarà pari alla cardinalità dell'*insieme delle parti* (o *insieme potenza*) di questo insieme, $P(E_c)$, ovvero l'insieme di tutti i sottoinsiemi propri e impropri di E_c.
Poiché il numero di elementi di E_c è 4.950, come visto al punto (a), il numero di elementi del suo insieme potenza è:

$$|P(E_c)| = 2^{4\,950}$$

(c) (2 punti) È possibile che il numero da calcolare al punto (b) sia talmente grande che il vostro calcolatore non vi abbia restituito alcun risultato. Ciononostante, dovreste essere comunque in grado di calcolare l'*ordine di grandezza* di questo numero, ovvero la potenza di 10 più vicina al numero stesso, ricordando che per calcolare l'ordine di grandezza occorre prima esprimere il numero n nella notazione scientifica, ovvero:

$$n = a \cdot 10^b$$

con $1 \leq a < 10$, e poi guardare al valore di a. Se $1 \leq a < 5$, allora l'ordine di grandezza è b; al contrario, se $5 \leq a < 10$, allora l'ordine di grandezza è $b + 1$.

Soluzione:
Per esprimere il numero nella notazione scientifica risolviamo la seguente equazione esponenziale:

$$10^x = 2^{4\,950}$$

Applicando la definizione e le proprietà del logaritmo si ha:

$$x = \log_{10} 2^{4\,950} = 4\,950 \cdot \log_{10} 2 = 4\,950 \cdot \frac{\ln 2}{\ln 10} = 4\,950 \ \cdot 0,30103 \approx 1\,490,1$$

Per cui:

$$2^{4\,950} \approx 10^{0,1} \cdot 10^{1\,490} \approx 1,26 \cdot 10^{1\,490}$$

L'ordine di grandezza è pertanto pari a 1490.
Si tratta quindi di un numero gigantesco considerando, ad esempio, che un *googol* è 10^{100} e il numero di particelle elementari nell'universo visibile è stimato in un ordine di grandezza tra 72 e 87.

Esercizio/Problema:	1	2	3	Totale
Punti:	20	4	6	30
Punteggio:				