Il sistema di domande inverse e il Teorema (chiamato Identità da Cornes) di Hotelling e Wold

Queste note servono solo per agevolare la comprensione del par. 2.3 e seguenti del Cap. II del testo di Cornes.

Quando studiamo il comportamento del consumatore di fronte ad N merci consumabili è importante definire oltre al sistema delle domande marshalliane dirette (quantità in funzione del prezzo e dell'importo totale spendibile) anche il sistema delle domande inverse (prezzo normalizzato in funzione della quantità). Sir John Hicks (1956) affermò che quando a fini applicativi studiamo le domande di mercato molto spesso iniziamo osservando un'offerta di mercato data (una data quantità prodotta che viene "portata" sul mercato) e quello che cerchiamo di capire è a quale prezzo tale quantità data sarà venduta. Molti mercati "all'ingrosso" di beni di base (ad esempio alimentari venduti sui mercati internazionali con contratti stipulati in anticipo sulla produzione effettiva; grano e zucchero ad esempio) pongono problemi simili: a che prezzo si venderà la quantità offerta? Dal punto di vista del consumatore il problema è simmetrico: a che prezzo è disposto a pagare la quantità? Quindi in molti casi ciò che interessa è il prezzo in funzione della quantità, più che la quantità in funzione del prezzo. Allora, ponendoci dal punto di vista del consumatore possiamo dire che in molti casi ci interessano più le domande inverse che quelle dirette. A questo punto si potrebbe dire: ricaviamo dalla massimizzazione vincolata dell'utilità le domande marshalliane dirette e poi, invertendole, otteniamo le domande inverse. È indispensabile procedere in questo modo? Hotelling e Wold mostrano che questa lunga procedura non è necessaria.

Il Teorema di Holtelling (1935) e Wold (1944) fonda matematicamente la immediata derivazione delle domande inverse sulla massimizzazione dell'utilità diretta e rappresenta un buon antidoto concettuale alla ingiustificata sovra semplificazione della trattazione *under graduate* del problema.

Sia una funzione di utilità $U(\boldsymbol{x})\colon R^N \rightarrow R$ una funzione di N variabili reali positive (quantità di beni di consumo), continua, quasi concava, non decrescente e strettamente crescente in almeno un argomento. La chiamiamo: *Funzione di Utilità Regolare*.
Sia $\boldsymbol{p}$ il corrispondente vettore dei prezzi e $R = \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}$ l'importo a disposizione del consumatore (non chiamatelo reddito) e $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p}/R$ il vettore ($N \times 1$) dei prezzi normalizzati rispetto a R.
Dati questi elementi illustriamo il Teorema.

1. Derivazione delle domande marshalliane inverse dal problema di massimo vincolato

Poniamo il solito problema

$Max_{\boldsymbol{x}}\ U(\boldsymbol{x})$ s.v. $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = R$ dove $U(\boldsymbol{x})$ è una funzione di utilità regolare.

Quindi scriviamo la lagrangiana

$$\Lambda = U(\boldsymbol{x}) - \lambda\left[\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - R\right]$$

Per un massimo occorre che per ogni i

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} = \lambda p_1 \\
&\quad\vdots \qquad \vdots \\
&\frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_N} = \lambda p_N \\
&\sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i x_i = R
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Il sistema di $N + 1$ equazioni genera il sistema di domande marshalliane in forma diretta

$$
\begin{aligned}
&x_1^* = F_1(\boldsymbol{p}, R) \\
&x_2^* = F_2(\boldsymbol{p}, R) \\
&\vdots \qquad \vdots \\
&x_N^* = F_N(\boldsymbol{p}, R)
\end{aligned}
$$

Le domande sono omogenee di grado zero per cui possiamo riscriverle come

$$x_i^* = F_i(r_1, \dots, r_N, 1) = f_i(\boldsymbol{r}) \text{ dove } r_i = \frac{p_i}{R} .$$

Torniamo alle condizioni di stazionarietà per una qualsiasi x_i:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \lambda p_i \text{ da cui} \\
&x_i \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \lambda p_i x_i \text{ e sommando per tutte le } i \\
&\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \lambda R \text{ da cui} \\
&\lambda = \frac{\sum\nolimits_{j=1}^{n} x_i \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}}{R}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Sostituendo (2) in (1) abbiamo

$$\frac{p_i}{R}=\frac{\dfrac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}} \quad \text{cioè} \quad r_i=\frac{\dfrac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}}=f_i^{-1}(\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

Abbiamo così ottenuto con (3) un sistema di N domande inverse da una qualsiasi U regolare e potremmo già dire: bene, la massimizzazione dell'utilità diretta sotto vincolo non genera solo domande dirette marshalliane ma anche, per eventuali fini pratici, anche le marshalliane inverse. Una interpretazione corrente della (3) è che l'identità di Hotelling-Wold ci dice che prezzo normalizzato per l'importo spendibile di in un bene è uguale **al rapporto tra la sua utilità marginale e la media delle utilità marginali ponderate per le loro domande.**

Ma possiamo fare di più per definire tali ultime domande. Ricordando che

$$\frac{\partial \ln U(\boldsymbol{x})}{\partial \ln x_i}=\frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\frac{x_i}{U(\boldsymbol{x})}$$

Avremo che

$$\frac{\partial \ln U(\boldsymbol{x})}{\partial \ln x_i}=\frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\frac{x_i}{U(\boldsymbol{x})}= \text{ nel nostro caso a } \lambda p_i \frac{x_i}{U(\boldsymbol{x})}$$

Da cui

$$\frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=\frac{U(\boldsymbol{x})}{x_i}\frac{\partial \ln U(\boldsymbol{x})}{\partial \ln x_i}$$

Che sostituita in (3) genera

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{\dfrac{\partial \ln U(x)}{\partial \ln x_i}\dfrac{U(x)}{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\partial \ln U(\boldsymbol{x})}{\partial \ln x_i}\dfrac{U(x)}{x_i}} \\ &= \frac{\dfrac{\partial \ln U(x)}{\partial \ln x_i}}{x_i \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \ln U(\boldsymbol{x})}{\partial \ln x_i}} \qquad (4) \\ &\equiv \frac{\text{Derivata logaritmica parziale di } \ln U \text{ rispetto a } \ln x_i}{x_i \text{ moltiplicata per Somma di } \textit{\textbf{tutte}} \text{ le derivate logaritmiche}} \end{aligned}$$

Questo è insieme a (3) il risultato noto come Teorema (o Identità) di Hotelling-Wold che permette di ottenere le domande inverse **direttamente** dalle funzioni di utilità regolari, senza passare dalla massimizzazione vincolata dell'utilità diretta. Ma non è solo una questione di risparmio di tempo. Nella versione (4) il Teorema permette di esprimere **le quota della spesa per ciascun bene** direttamente dalla funzione di utilità. Infatti per il bene i abbiamo

$$r_i x_i = \frac{p_i x_i}{R} = \frac{\frac{\partial \ln U(\boldsymbol{x})}{\partial \ln x_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln U(\boldsymbol{x})}{\partial \ln x_i}} \equiv \frac{\text{Derivata logaritmica parziale di } U \text{ rispetto a } x_i}{\text{Somma di } \textbf{\textit{tutte}} \text{ le derivate logaritmiche}}$$

È facile verificare che la somma delle N quote è pari a 1. Ad esempio, supponendo che i beni siano solo X e Y, otteniamo

$$r_X + r_Y = \frac{p_X X + p_Y Y}{R} = \frac{\frac{\partial \ln U(X,Y)}{\partial \ln X} + \frac{\partial \ln U(\boldsymbol{x})}{\partial \ln Y}}{\frac{\partial \ln U(X,Y)}{\partial \ln X} + \frac{\partial \ln U(\boldsymbol{x})}{\partial \ln Y}} = 1$$

Esempio 1

Con $U(X,Y) = AX^{\alpha}Y^{1-\alpha}$ e $r_X X + r_Y Y = 1$ già sappiamo che $X = \alpha / r_X$ e $Y = (1-\alpha)/r_Y$. Da ciò le domande inverse $r_X = \alpha / X$ e $r_Y = (1-\alpha)/Y$.
Vediamo se il risultato torna con Hotelling e Wold. Nel nostro caso se trasformiamo la U in logaritmi otteniamo $\ln U(X,Y) = \ln(AX^{\alpha}Y^{1-\alpha}) = \ln A + \alpha \ln X + (1-\alpha)\ln Y$. Quindi

$$r_X = \frac{\frac{\partial \ln U(X,Y)}{\partial \ln X}}{X\left[\frac{\partial \ln U(X,Y)}{\partial \ln X} + \frac{\partial \ln U(X,Y)}{\partial \ln Y}\right]} = \frac{\alpha}{X[\alpha + (1-\alpha)]} = \frac{\alpha}{X} = \frac{\frac{\partial U(X,Y)}{\partial X}}{\left[X\frac{\partial U(X,Y)}{\partial X} + Y\frac{\partial U(X,Y)}{\partial Y}\right]}$$

Rifare il tutto per r_Y.

Esempio 2

Con $U(X,Y) = \sqrt{XY}$ e $r_X X + r_Y Y = 1$. Verificare che la domanda inversa di X è $r_x = 1/2X$. Trovare la domanda inversa di Y. Verificare i risultati trovando nel modo consueto la domanda marshalliana e invertendola.

Esempio 3

Rifare per Y come esercizio 1. Inoltre: a) usare il risultato ottenuto per mostrare che la somma delle shares è pari a 1. b) che la normalizzazione a 1 di R è verificata ex post dal risultato sulle domande.

Esercizio 1

Sia la funzione di utilità alla Christensen et al. (1975)

$$U(\boldsymbol{x}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \ln x_i \ln x_j .$$

Trovare la domanda inversa di x_i applicando il teorema di Hotelling-Wold.

2. Ulteriore modalità per la derivazione delle domande marshalliane inverse

La funzione $U(\boldsymbol{r})$ la possiamo interpretare in senso lato come la misura di quanto è disutile al consumatore sopportare i prezzi che si sono formati sul mercato. Il consumatore sarà lieto di minimizzarla, rispettando il vincolo $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 1$. Mostriamo con un esempio con $N = 2$ che $Min_r \; U(\boldsymbol{r})$ s.v. $\sum_{i=1}^{2} r_i x_i = 1$ genera le domande marshalliane in forma inversa.

Sia $U(\boldsymbol{x}) = AX_1^{\alpha} X_2^{1-\alpha}$ che dopo la sostituzione diventa $U(\boldsymbol{r}) = Ar_1^{\alpha} r_2^{1-\alpha}$. Allora

$$\Lambda = Ar_1^{\alpha} r_2^{1-\alpha} - \lambda \left[\sum_{i=1}^{2} r_i x_i - 1 \right]$$

Le condizioni del primo ordine richiedono $x_1 = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \frac{r_1}{r_2} x_2$ che sostituite nel vincolo danno

$$r_1 = \frac{\alpha}{x_1} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1-\alpha}{x_2}$$

Verificare il risultato non guardano le pagine precedenti ma ricavando le domande dirette attraverso la procedura di massimizzazione da libro di testo:

$$Max_{\boldsymbol{x}} \; U(\boldsymbol{x}) \text{ s.v. } \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = R$$

Il teorema di Hotelling-Wold e la derivazione delle domande inverse è molto utile nell'analisi applicata allo studio dei consumi e alla stima delle quote di spesa per (in particolare) i consumi alimentari in presenza di variazioni nella distribuzione del reddito tra i consumatori. Una utile traccia metodologica è

Wong K.K.G. et al. (2019), Effects of income distribution in an inverse demand system: evidence from Chinese household survey data, *Applied Economics*, 51, pp. 5328–5344

BIBLIO

Opere di Hotelling e di Wold relative al tema trattato nella dispensa.

H. Hotelling (1935), Demand Functions with Limited Budgets, Econometrica, Vol. 3, No. 1 (Jan., 1935), pp. 66-78

H. Wold (1944), A Synthesis of Pure Demand Analysis, Skandinavisk Aktuarietidskrift, Parti I, II e III