Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

26 Aprile 2021

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \max\limits_{u} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-3t} \ln u \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = 2x - u \\ x(0) = 4 \\ u \geq 0 \\ \lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min\limits_{u} \displaystyle\int_0^{1} u^2 \, \mathrm{d}t + (x(1))^2 \\ \dot{x} = x + u \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

In order to solve BHJ equation, we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{V(t,x) = h(t)x^2, \ h \in C^1(\mathbb{R})\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \, \mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} \ J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U, \ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases} \tag{1}$$

con $\boldsymbol{\alpha}$, t_0 e t_1 fissati, $U \subset \mathbb{R}^k$ chiuso.

i. Si enunci la condizione necessaria di Pontryagin per il problema (1), con ipotesi minimali;

ii. si illustri un risultato sul comportamento dell'Hamiltoniana lungo il cammino ottimo (*optimal path*) e lo si provi;

iii. sotto opportune ipotesi, si enunci la condizione sufficiente di Mangasarian e la si provi.

4. (6 punti) Nel contesto della teoria dei giochi differenziali di cattura-evasione, si consideri il modello "the lady in the lake":

$$\begin{cases} \textit{Man (P)}\text{: } \min\limits_{u_1} |\theta(T)| \qquad \textit{Lady (E)}\text{: } \max\limits_{u_2} |\theta(T)| \\ |u_1| \leq 1 \\ \dot{\theta} = \dfrac{v_E \sin u_2}{r} - \dfrac{u_1}{R} \\ \dot{r} = v_E \cos u_2 \\ r(0) = 0, \ r(T) = R \end{cases}$$

con v_E fissato in $(0,1)$, $R > 0$ fissato e $T > 0$ libero.

i. Si introduca il modello proposto;

ii. si determini un equilibrio di Nash per il problema proposto. In particolare è richiesto lo studio sulla possibilità che i due giocatori realizzino il loro pay off, cioè del segno di $\theta(T^*)$ al tempo ottimo di uscita T^*.

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{u}} \displaystyle\int_0^\infty f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\, \mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{2}$$

i. Si consideri il controesempio di Halkin

$$\begin{cases} \max\limits_{u} J(u) \\ J(u) = \displaystyle\int_0^\infty (1-x)u\, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = (1-x)u \\ x(0) = 0 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

e si mostri che esistono dei controlli ottimi il cui moltiplicatore λ^* è tale che $\lim_{t\to\infty} \lambda^*(t) \neq 0$;

ii. con opportune ipotesi, si enunci una condizione sufficiente di ottimalità per il problema (2);

iii. nel caso in cui la running cost nel problema (2) sia $e^{-rt} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, con $r > 0$ fissato, si introducano la Hamiltoniana corrente H^c e il moltiplicatore corrente; si scrivano il principio del massimo e l'equazione aggiunta per H^c e si provino queste nuove relazioni.