Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

21 Gennaio 2021

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \max\limits_{u} \displaystyle\int_0^5 x_2 \,\mathrm{d}t \\ \dot{x}_1 = 2ux_1 \\ \dot{x}_2 = 2(1-u)x_1 \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 3 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min\limits_{u} \displaystyle\int_0^1 u^2 \,\mathrm{d}t + (x(1))^2 \\ \dot{x} = x + u \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

In order to solve BHJ equation, we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{V(t,x) = h(t)x^2,\ h \in C^1(\mathbb{R})\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}} \ J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0,t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con $f,\ g$ e ψ continue, U chiuso e con $t_0,\ t_1$ e $\boldsymbol{\alpha}$ fissati.

i. Si definisca la funzione valore per il problema proposto e si forniscano, sotto opportune ipotesi, condizioni necessarie affinché una funzione sia la funzione valore del problema: si dimostri almeno una di queste condizioni necessarie;

ii. sotto opportune ipotesi, si forniscano condizioni sufficienti affinché una funzione sia la funzione valore del problema: si dimostrino tali condizioni sufficienti.

4. (6 punti) Si consideri il seguente problema della "Dubin car":

$$\begin{cases} \min\limits_{u} T \\ \dot{x}_1 = \cos\theta \\ \dot{x}_2 = \sin\theta \\ \dot{\theta} = u \\ x_1(0) = 4, \qquad x_2(0) = 0, \qquad \theta(0) = \pi/2 \\ x_1(T) = 0, \qquad x_2(T) = 0 \\ |u| \le 1 \end{cases}$$

i. Si introduca con precisione il modello;

ii. si risolva il modello proposto.

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema di cattura-evasione di tipo

$$\begin{cases} \textit{Pursuer}\colon \min\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2), \qquad \textit{Evader}\colon \max\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ \qquad \mathbf{u}_1(t) \in U_1 \subset \mathbb{R}^{k_1} \qquad\qquad\qquad \mathbf{u}_2(t) \in U_2 \subset \mathbb{R}^{k_2} \\ \qquad J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = \begin{cases} -1 & \text{if } \exists\, t \geq 0 \text{ s.t. } \mathbf{x}(t) \in \operatorname{int}(\mathcal{T}_0) \\ +1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \qquad \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ \qquad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha}, \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{T}_0 \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

con g continua e target set chiuso $[0,\infty) \times \mathcal{T}_0$ e game set $[0,\infty) \times \mathcal{G}_0$. Si supponga, inoltre, che la condizione di Isaacs sia soddisfatta.

i. Sotto le oppurtune ipotesi

- si forniscano le definizioni di insieme degli stati di cattura $\mathcal{C}_{ap}$, di insieme degli stati di fuga $\mathcal{E}_{sc}$ e di barriera $\mathcal{B}_{ar}$;
- si introduca la nozione di semipermeabilità e **si dimostri** che la barriera è una superficie semipermeabile;
- si introduca il concetto di controllo di barriera;
- si forniscano le equazioni che permettono di costruire la barriera.

ii. Si consideri il modello "Interception of a straight flying evader":

$$\begin{cases} \textit{Pursuer}\colon \min\limits_{\psi} J(\psi,\varphi), \qquad \textit{Evader}\colon \max\limits_{\varphi \in \{-1,+1\}} J(\psi,\varphi) \\ \qquad J(\psi,\varphi) = \begin{cases} -1 & \text{if } \exists\, t \geq 0 \text{ s.t. } \|(x(t),y(t))\|_2 < l \\ +1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \qquad \dot{x} = \omega\varphi - \sin\psi \\ \qquad \dot{y} = -\cos\psi \\ \qquad (x(0),y(0)) = (x_0,y_0), \qquad y_0 \geq 0 \end{cases}$$

con $\omega > 1$ e $l > 0$ fissati.

- si introduca il modello con rigore;
- si costruisca la barriera del problema, gli insiemi $\mathcal{C}_{ap}$ e $\mathcal{E}_{sc}$.