Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

13 Settembre 2021

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min_u T \\ \ddot{x} = u \\ x(0) = \dot{x}(0) = -1 \\ x(T) = \dot{x}(T) = 0 \\ |u| \leq 1 \end{cases}$$

Si consiglia di usare un teorema di esistenza per provare che il controllo estremale determinato è ottimo.

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con la Programmazione Dinamica

$$\begin{cases} \max \int_0^\infty 2\sqrt{u}e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = 2x - u \\ x(0) = 1 \\ x \geq 0 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

Per risolvere la BHJ equation per la funzione valore corrente, si suggerisce di cercare le soluzioni nella famiglia di funzioni $\mathcal{F} = \{V^c(x) = A\sqrt{x},\ A \in \mathbb{R}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo autonomo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{u})\,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con t_0 e t_1 fissati.

i. Nelle ipotesi che il control set U sia compatto e che f, g e ψ siano limitate e Lipschitz rispetto a $\mathbf{x}$ uniformemente rispetto a $\mathbf{u}$, si provi che la funzione valore è limitata e Lipschitz;

ii. si consideri l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi: il fatto che la funzione valore sia Lipschitz che conseguenze ha? Si introduca la nozione di soluzione viscosa per l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi, motivando la necessità di tale definizione;

iii. si provi che $V(t, x) = |x| + t$ é soluzione viscosa dell'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi per il problema

$$\begin{cases} \max \int_{-1}^0 -\frac{(|u| + 2)^2}{4}\,\mathrm{d}t + |x(0)| \\ \dot{x} = u \\ |u| \leq 2 \\ x(-1) = 1 \end{cases}$$

4. (6 punti) Si consideri il "two-sector model"

$$\begin{cases} \max\limits_{u\in\mathcal{C}} \displaystyle\int_0^T x_2 \,\mathrm{d}t \\ \dot{x}_1 = \alpha u x_1 \\ \dot{x}_2 = \alpha(1-u)x_1 \\ x_1(0) = a_1 \\ x_2(0) = a_2 \\ \mathcal{C} = \{u : [0,T] \to [0,1] \subset \mathbb{R},\ u \in KC\} \end{cases}$$

dove $\alpha,\ a_1,\ a_2$ e T sono positivi e fissi; si consideri in particolare il caso $T > \frac{2}{\alpha}$.

i. Si introduca con rigore il modello proposto;

ii. si risolva il modello proposto.

5. (6 punti) Si consideri il seguente gioco di cattura–evasione

$$\begin{cases} \textit{Pursuer}\text{: } \min\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2), \qquad \textit{Evader}\text{: } \max\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ \qquad \mathbf{u}_1(t) \in U_1, \qquad\qquad\qquad \mathbf{u}_2(t) \in U_2 \\ \qquad J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = \displaystyle\int_0^{T_\mathbf{x}} f(\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)\,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T_\mathbf{x})) \\ \qquad \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ \qquad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha}, \qquad (0,\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{G}\setminus\mathcal{T} \\ \qquad (T_\mathbf{x}, \mathbf{x}(T_\mathbf{x})) \in \partial\mathcal{T} \end{cases}$$

con target set $\mathcal{T}$ dato da

$$\mathcal{T} = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{T}_0 \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$$

ove $\mathcal{T}_0$ è chiuso, con game set $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ e con $T_\mathbf{x}$ tempo di uscita della traiettoria; le funzioni f, g e ψ siano continue.

i. Si provi che la funzione valore V^- non dipende esplicitamente dal tempo, cioè

$$V^-(t,\mathbf{x}) = V^-(\mathbf{x}), \qquad \forall (t,\mathbf{x}) \in \mathcal{G};$$

ii. si provi che

$$\mathcal{G} = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{G}_0 \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n;$$

iii. si provi che se V^- è in $C^1(\mathrm{int}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{T}_0))$, allora l'equazione inferiore di Isaacs diventa

$$\begin{cases} H^-_{DP}(\mathbf{x}, \nabla V^-(\mathbf{x})) = 0 & \text{for } \mathbf{x} \in \mathrm{int}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{T}_0) \\ V^-(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) & \text{for } \mathbf{x} \in \mathcal{T}_0 \end{cases}$$