

# PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA II 2020-21

M. GABRIELLA KUHN,  
ANDREA CALOGERO

## 0.1. Calcolo differenziale in più variabili. Prerequisiti

Limiti e continuità per funzioni di più variabili. Teorema di Weierstrass (\*).

- (1) Derivate direzionali. Funzioni differenziabili. Legame tra le derivate direzionali nel caso di funzioni differenziabili. Legami tra continuità e derivabilità e differenziabilità. Derivate di ordine successivo. Derivate di funzioni composte (\*).
- (2) Massimi e minimi in insiemi aperti: condizione necessaria per funzioni differenziabili. Curve di livello.
- (3) Matrici definite/semidefinite positive/negative e relativi criteri. Matrice Hessiana. Formula di Taylor arrestata al secondo ordine. Funzioni convesse e relativo criterio per il riconoscimento dei loro estremanti.
- (4) Riconoscimento dei massimi e minimi mediante la matrice Hessiana.

## 0.2. Calcolo integrale in più variabili.

- (1) Definizione di integrale di Riemann di una funzione a valori reali.
- (2) Insiemi misurabili secondo Peano-Jordan: condizione necessaria e sufficiente per la misurabilità nel caso di insiemi limitati. Esempi di insiemi misurabili e non.
- (3) Metodo di riduzione (Teorema di Fubini) per gli integrali multipli. Baricentro di un insieme misurabile bidimensionale. Volume dei solidi.
- (4) Cambio di variabili negli integrali doppi e tripli (\*): coordinate polari, sferiche e cilindriche. Volume dei solidi di rotazione: Teorema di Guldino.
- (5) Integrali impropri. Calcolo di  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

## 0.3. Curve e superfici.

- (1) Curve regolari/ regolari a tratti/ chiuse /semplici in  $\mathbb{R}^n$ . Lunghezza di una curva: definizioni equivalenti e indipendenza dalla parametrizzazione (non è richiesta la dimostrazione della lunghezza di una curva regolare). Ascissa curvilinea.
- (2) Teorema delle funzioni implicite (Dini) nel caso bidimensionale. Superfici in forma cartesiana; condizioni sufficienti affinché una superficie sia localmente un grafico. Prodotto vettoriale e teorema di Dini nel caso generale (\*).
- (3) Massimi e minimi in insiemi compatti: moltiplicatori di Lagrange (dimostrazione solo nel caso di un vincolo in  $\mathbb{R}^2$ ).

#### 0.4. Successioni e serie di funzioni.

- (1) Spazi vettoriali normati: esempi ( $C([a, b])$ ,  $B(I)$  (con  $I$  intervallo)  $C^n([a, b])$ ). Spazi di Banach.
- (2) Spazi metrici completi.
- (3) Teorema delle contrazioni.
- (4) Convergenza puntuale e uniforme per successioni/serie di funzioni a valori reali. Criterio di Weierstrass per le serie di funzioni. Convergenza uniforme e limitatezza/continuità delle funzione limite: Teorema del doppio limite. Convergenza puntuale/ uniforme per funzioni derivabili/integrabili e relativi teoremi di passaggio al limite.
- (5) Serie di potenze: raggio di convergenza. Serie di Taylor. Approssimazione di integrali mediante l'uso di serie di potenze.

#### 0.5. Equazioni differenziali.

- (1) Problema di Cauchy per equazioni del primo ordine. Teorema di esistenza e unicità locale. Prolungamento delle soluzioni. Intervallo massimale di definizione (\*).
- (2) Condizione di sublinearità . Teoremi di esistenza e unicità globale (non è richiesta la dimostrazione nel caso sublineare).
- (3) Equazioni di ordine  $n$ : equivalenza con un sistema del primo ordine. Sistemi lineari del primo ordine. Struttura dello spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo del primo ordine. Matrice Wronskiana e teorema di Liouville (\*) (relativo al suo determinante). Soluzioni nel caso non omogeneo. Metodo di variazione delle costanti arbitrarie.
- (4) Matrice esponenziale: definizione. Calcolo della matrice esponenziale nel caso in cui la matrice sia diagonalizzabile nel campo reale. È richiesto il calcolo negli altri casi solo per matrici  $2 \times 2$ .

- (5) Metodi di soluzione per alcune equazioni e sistemi particolari.  
(variabili separabili, lineari del I ordine, di Bernoulli, Riccati, omogenee, lineari di ordine  $n$  a coefficienti costanti, equazione di Eulero, sistemi omogenei e non a coefficienti costanti)

Sugli argomenti sopra elencati richiesto di saper risolvere esercizi come quelli proposti nelle 6 liste di esercizi disponibili sulla pagine del corso.

(\*) Non è richiesta la dimostrazione

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI MILANO “BICOCCA”, VIA  
COZZI 53, 20125 MILANO, ITALIA

*Email address:* `mariagabriella.kuhn@unimib.it`