Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
22 Febbraio 2021

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Sia $f(x,y) = x^2y^2e^{-2x^2-3y^2}$.

   a. **(2 punti)** Calcolare
   $$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y).$$

   b. **(2 punti)** Determinare i punti stazionari di f in R^2.

   c. **(1 punti)** Tenendo presente il risultato del limite di cui al primo punto determinare la natura dei punti stazionari trovati

   d. **(3 punti)** disegnare un grafico approssimativo della curva di livello di f passante per il punto (1,1) in un intorno di tale punto (è richiesto il segno della derivata seconda)

2. **(7 punti)** Al variare del paramentro reale $\alpha > 0$, si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

a. **(3 punti)** Stabilire l'insieme E_α di convergenza puntuale: in tale insieme si denoti con $f_\alpha(x)$ la somma.

b. **(2 punti)** Per ogni $\alpha > 0$ si determino gli intervalli in cui la convergenza è uniforme.

c. **(2 punti)** Si calcoli, con errore inferiore a $\frac{1}{1000}$,

$$\int_1^{3/2} f_1(x)\, \mathrm{d}x.$$

3. **(7 punti)** In R^3 si consideri

$$E = \{(x, y, z) \ : 0 \le y \le x \, , x + y \le 2 \, , x + y \le z\}.$$

Stabilire per quali valori di α esiste

$$\int_E \frac{1}{z^\alpha} e^{\frac{x-y}{x+y}} \, dxdydz$$

e, per tali valori, calcolarlo.

4. **(8 punti)** Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni dei seguenti tre problemi di Cauchy, le si determinino.

   a. **(2 punti)**

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \\ x_1(\pi) = 0 \\ x_2(\pi) = 0 \end{cases}$$

   b. **(2 punti)**

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + t \\ x_2' = x_1 - x_2 \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$$

   c. **(4 punti)**

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + t \\ x_2' = x_1 - x_2 + \dfrac{1}{\cos t} \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$$