Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
22 Febbraio 2021

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Sia $f(x,y) = x^2y^2e^{-2x^2-3y^2}$.

   a. **(2 punti)** Calcolare
   $$\lim_{\|(x,y)\|\to\ +\infty} f(x,y).$$

• Si noti $f(x,y)\geq 0 \ \forall (x,y)$ e $f(x,y)=0$ solo sui due assi cartesiani

•• $0 \leq \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) \leq \lim_{r\to\infty} r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\, e^{-2r^2} = 0$

essendo $e^{-y^2}\leq 1$, ponendo $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

essendo $r^4e^{-2r^2}\to 0$ per $r\to\infty$

   b. **(2 punti)** Determinare i punti stazionari di f in R^2.

$\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2xy^2(1-2x^2)=0 \\ 2x^2y(1-3y^2)=0 \end{cases} \iff A_{x_0}=(x_0,0)$, $B_{y_0}=(0,y_0)$, $C_1=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt3}\right)$, $C_2=\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt3}\right)$, $C_3=\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt3}\right)$, $C_4=\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt3}\right)$

   c. **(1 punti)** Tenendo presente il risultato del limite di cui al primo punto determinare la natura dei punti stazionari trovati

I punti A_{x_0} e B_{y_0} sono tutti minimi assoluti e globali essendo $f\geq 0$

I punti C_i sono tutti massimi assoluti per il Teorema di Weierstrass perché, per r grande, nella bolla $\overline{B(0,r)}$ la f ammette Max e Min e sul bordo la f assume valori che tendono a zero per $r\to\infty$

   d. **(3 punti)** disegnare un grafico approssimativo della curva di livello di f passante per il punto (1,1) in un intorno di tale punto (è richiesto il segno della derivata seconda)

$f(1,1)=e^{-5}$. Definiamo $F(x,y)=f(x,y)-e^{-5}$. $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = -4 \neq 0$ per $x=y=1$

Quindi $\exists\ g: U_1 \to V_1$ (entrambi intorni di 1)

tale che $g(1)=1$, $y=g(x)$, $F(x,g(x))=0 \ \forall x\in U_1$. Inoltre

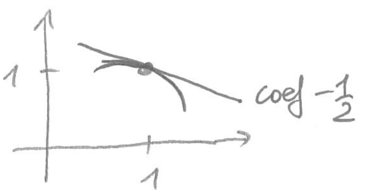
$\frac{d}{dx}F(x,y) = \left(2xy^2+x^2 2yy' + x^2y^2(-4x-6yy')\right)e^{-2x^2-3y^2} = 0 \ \forall x\in U_1$

$y=y(x)=g(x)$ Ponendo $x=1 \Rightarrow y=g(1)=1$ si ottiene $y'(1)=g'(1)=-\frac12$

$\frac{d^2}{dx^2}F(x,y) = \left[2y^2+4xyy'+4xyy'+2x^2(y')^2+2x^2yy''+(2xy^2+x^2 2yy')(-4x-6yy')+ x^2y^2(-4-6(y')^2-6yy'')+\left(2xy^2+x^2 2yy'+x^2y^2(-4x-6yy')\right)(-4x-6yy')\right]e^{-2x^2-3y^2}=0 \ \forall x\in U_1$

Ponendo $x=1 \Rightarrow y=g(1)=1$, $y'(1)=g'(1)=\frac12$ si ottiene $g''(1)=-2$

Quindi



è un grafico approssimativo della curva di livello

2. **(7 punti)** Al variare del paramentro reale $\alpha > 0$, si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

a. **(3 punti)** Stabilire l'insieme E_α di convergenza puntuale: in tale insieme si denoti con $f_\alpha(x)$ la somma.

• la serie data, con il cambio $z = x-1$ diventa una nuova serie di potenze centrata nell'origine,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) z^n \quad (*)$$

•• Il raggio di convergenza di $*$ è 1 essendo $\sqrt[n]{\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)} \sim n^{-\frac{\alpha}{n}}$ $\forall \alpha > 0$

Per $z = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge per Leibniz $\forall \alpha$

Per $z = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge per $\alpha > 1$

••• Essendo $x = z+1 \Rightarrow E_\alpha = \begin{cases} (0,2] & \text{se } \alpha \in (0,1] \\ [0,2] & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$

b. **(2 punti)** Per ogni $\alpha > 0$ si determino gli intervalli in cui la convergenza è uniforme.

Il Teorema di Abel, applicato alla serie $(*)$, garantisce che la serie di partenza

per $\alpha \in (0,1]$ converge uniformemente in $\forall [a, 2]$ con $0 < a < 2$

per $\alpha > 1$ converge uniformemente in $[0,2]$

c. **(2 punti)** Si calcoli, con errore inferiore a $\frac{1}{1000}$,

$$\int_1^{3/2} f_1(x)\, dx.$$

Avendo convergenza uniforme della serie di partenza (per $\alpha = 1$) in $[1, \frac{3}{2}]$ abbiamo

$$\int_1^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n\, dx \overset{\text{convergenza uniforme}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \left.\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)}\right|_1^{3/2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{n+1}$$

che è una serie numerica a segni alterni, convergente a S per il Teorema di Leibniz

Inoltre $\left| S - \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1} \right| \leq \log\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\frac{1}{N+1} = E_N$

Scegliendo $N = 8$ si vede che $E_8 \leq \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \frac{1}{10} < 10^{-3}$

Quindi l'approssimazione cercata è $\sum_{n=1}^{8} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1}$.

3. **(7 punti)** In R^3 si consideri

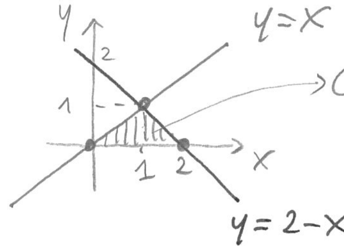
$$E = \{(x, y, z) \ : 0 \le y \le x \,, x + y \le 2 \,, x + y \le z\}.$$

Stabilire per quali valori di α esiste

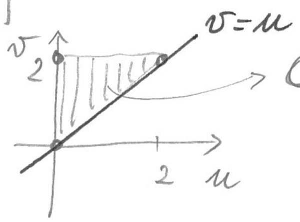
$$\int_E \frac{1}{z^\alpha} e^{\frac{x-y}{x+y}} \, dxdydz$$

e, per tali valori, calcolarlo.

Usiamo il cambio di variabili (lineare) $\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \\ z = z \end{cases}$ ★



$\rightarrow C = \{0 \le y \le x, \ x + y \le 2\}$



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \partial x & \partial y & \partial z \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ v \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

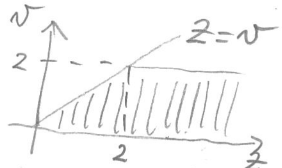
ha come determinante 2 quindi la trasformazione ★ ha determinante dello Jacobiano uguale a $\frac{1}{2}$

$$\int_E \underbrace{\frac{1}{z^\alpha} e^{\frac{x-y}{x+y}}} dxdydz = \int_0^2 \int_0^v \int_v^\infty \frac{1}{2} \frac{1}{z^\alpha} e^{\frac{u}{v}} \, dz\,du\,dv$$

Essendo sempre positiva in E, stabilire se l'integrale esiste (cioè $\int_E |f| dxdydz < \infty$) è equivalente a stabilire se esiste $\int_E f dxdydz$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_v^\infty \frac{1}{z^\alpha} \left(v e^{\frac{u}{v}} \right|_0^v dz\,dv = \frac{e-1}{2} \int_0^2 \int_v^\infty \frac{v}{z^\alpha} dz\,dv =$$

ove



quindi

$$= \frac{e-1}{2} \left(\int_0^2 \int_0^z \frac{v}{z^\alpha} dv\,dz + \int_2^\infty \int_0^2 \frac{v}{z^\alpha} dv\,dz \right) =$$

$$= \frac{e-1}{2} \left(\int_0^2 \frac{1}{z^\alpha} \left(\frac{1}{2} v^2 \right]_0^z dz + \left(\frac{1}{2} v^2 \right]_0^2 \int_2^\infty \frac{1}{z^\alpha} dz \right) = \frac{e-1}{2} \left(\frac{1}{2} \underbrace{\int_0^2 z^{2-\alpha} dz}_{\exists \text{ per } \alpha < 3} + 2 \underbrace{\int_2^\infty \frac{1}{z^\alpha} dz}_{\exists \text{ per } \alpha > 1} \right)$$

$\Rightarrow \exists$ per $\alpha \in (1,3)$ e vale $\frac{e-1}{2} \left(\frac{2^{3-\alpha}}{2(3-\alpha)} + \frac{2^{2-\alpha}}{\alpha - 1} \right) = \frac{(e-1) 2^{3-\alpha}}{2(3-\alpha)(\alpha-1)}$

4. **(8 punti)** Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni dei seguenti tre problemi di Cauchy, le si determinino.

a. **(2 punti)**

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \\ x_1(\pi) = 0 \\ x_2(\pi) = 0 \end{cases}$$

• Sia $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Il sistema $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}'=A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ ammette unica una soluzione globale $\forall$ dato iniziale $(x_1(t_0),x_2(t_0))=(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ essendo A a coef. costanti.

•• Si vede facilmente che $\begin{cases}x_1(t)=0\\ x_2(t)=0\end{cases}$ soddisfa il problema dato e per l'unicità è l'unica soluzione

••• Alternativamente

$x_1''=x_1'-2x_2'=$
$=x_1'-2(x_1-x_2)=$
$=x_1'-2x_1+x_1-x_1'$
$\Rightarrow x_1''+x_1=0$ (*)
$\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i$
$x_1(t)=A\cos t+B\sin t$
$x_2(t)=\frac{x_1(t)-x_1'(t)}{2}$
$=\frac{A-B}{2}\cos t+\frac{A+B}{2}\sin t$
$x_1(\pi)=x_2(\pi)=0$
$\Rightarrow x_1(t)=x_2(t)=0$

b. **(2 punti)**

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + t \\ x_2' = x_1 - x_2 \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$$

• $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}'=A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\ 0\end{pmatrix}$ ammette unica soluzione globale $\forall$ dato iniziale essendo A a coef costanti e $b(t)=\begin{pmatrix}t\\ 0\end{pmatrix}$ continua.

•• $x_1''=x_1'-2x_2'+1=x_1'-2(x_1-x_2)+1$
$=x_1'-2x_1+x_1-x_1'+t+1$

$\Rightarrow x_1''+x_1=t+1$ → SOLU. OMOGENEA (*) $\boxed{x_1=A\cos t+B\sin t}$

→ SOLU. PARTICOLARE $x_1=Ct+D$ da cui
$0+Ct+D=t+1 \Rightarrow \boxed{x_1=t+1}$ (*)

$\Rightarrow x_1(t)=A\cos t+B\sin t+t+1$
$x_2(t)=\frac{x_1(t)-x_1'(t)+t}{2}=\frac{A-B}{2}\cos t+\frac{A+B}{2}\sin t+t$

$\begin{cases}x_1(0)=0\\ x_2(0)=1\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}A=-1\\ B=-3\end{matrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}x_1(t)=-\cos t-3\sin t+t+1\\ x_2(t)=\cos t-2\sin t+t\end{cases}$ è la soluzione

c. **(4 punti)**

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + t \\ x_2' = x_1 - x_2 + \dfrac{1}{\cos t} \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$$

• $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}'=A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\ \frac{1}{\cos t}\end{pmatrix}$ ammette soluzione locale con dato $x_1(0)=x_2(0)=1$ essendo $b(t)=\begin{pmatrix}t\\ \frac{1}{\cos t}\end{pmatrix}$ continua in $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

•• $x_1''=x_1'-2x_2'+1=x_1-2(x_1-x_2+\frac{1}{\cos t})+1$
$=x_1'-2x_1+x_1-x_1'+t+1-\frac{2}{\cos t}$

⊠ $\Rightarrow \boxed{x_1''+x_1=t+1-\frac{2}{\cos t}}$ → SOLU. OMOGENEA (*) $x_1=A\cos t+B\sin t$

→ SOLU. PARTICOLARE ⊠ $x_1''+x_1=-\frac{2}{\cos t}$ la cerco con variazione costanti arbitrarie (vedi •••)

SOLU. PARTICOLARE $x_1''+x_1=t+1$
$\Rightarrow x_1=t+1$ (*)

••• Cerco $c_1(t)$ $c_2(t)$: $x_1(t)=c_1(t)\cos t+c_2(t)\sin t$ sia solu. particolare di ⊠

$\begin{cases}c_1'\cos t+c_2'\sin t=0\\ -c_1'\sin t+c_2'\cos t=-\frac{2}{\cos t}\end{cases}$

$\Rightarrow c_1'=-\frac{c_2'\sin t}{\cos t}$ $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $\Rightarrow c_2'=-2 \Rightarrow c_2=-2t$

$\Rightarrow c_1'=-2\frac{\sin t}{\cos t} \Rightarrow c_1=2\ln(\cos t)$

•••• Per principio sovrapp. la soluzione di ⊠

(*) $x_1(t)=A\cos t+B\sin t+t+1-2\cos t\ln(\cos t)-2t\sin t$
$x_2(t)=\frac{x_1-x_1'+t}{2}=\frac{A-B}{2}\cos t+\frac{A+B}{2}\sin t+t+$
$-(\cos t+\sin t)\ln(\cos t)+t(\cos t-\sin t)$

$x_1(0)=x_2(0)=1 \Rightarrow A=0, B=-2$