

Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
25 Gennaio 2021

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordinati o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

1. **(8 punti)** Sia

$$f(x, y) = x^2y(4 - x - y).$$

a. **(1 punto)** Scrivere il polinomio di Mc Laurin arrestato al terzo ordine di f .

b. **(5 punti)** Determinare i massimi e i minimi relativi e assoluti (se esistono) di f nel suo insieme di definizione.

c. **(2 punti)** Determinare i massimi e i minimi assoluti di f nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$$

2. (7 punti) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + x^{2n}}.$$

a. (3 punti) Stabilire l'insieme E di convergenza puntuale.

b. (2 punti) Stabilire se la convergenza risulta uniforme su E .

c. (2 punti) Stabilire se esiste qualche $a > 0$ tale che la convergenza risulta uniforme su $[a, +\infty)$ e, nel caso esista, esibire almeno un valore di a .

3. (7 punti) Si consideri

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy > 0, 0 < z < \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \sqrt{x^2 + y^2} < z + 1 \right\}.$$

a. (3 punti) Si calcoli il volume di $D \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

b. (4 punti) Dopo aver verificato che esiste finito

$$\int_D \frac{y}{(z+1)\sqrt[4]{(x^2+y^2)^5}} dx dy dz,$$

lo si calcoli.

4. (8 punti) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y'' - \frac{10}{3} x y' + 4y = x^4 \\ y(1) = \frac{3}{8} \\ y'(1) = b \end{cases}$$

a. (3 punti) Si determini la soluzione locale.

b. (2 punti) Si stabilisca se esistono valori di b per cui essa è definita su tutto \mathbb{R} .

c. (3 punti) Nel caso ci siano soluzioni definite su tutto \mathbb{R} se ne discuta l'unicità.