Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
27 Settembre 2021

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(7 punti)** Si consideri la funzione
$$f(x,y) = x^{2x} + (2y)^y$$
nel suo dominio Ω.

   a. **(3 punti)** Si determinino, se esistono, i punti di massimi e di minimi locali di f in Ω; si determinino, se esistono, i punti di massimi e di minimi assoluti di f in Ω;

   b. **(1 punti)** si scriva il polinomio di Taylor di f al secondo ordine nel punto $(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e})$;

   c. **(3 punti)** sia γ l'insieme/cruva di livello della funzione f passante per il punto $P = (1, \frac{1}{2e})$: tracciare un grafico di γ in un intorno di P individuando la retta tangente e la concavità/convessità.

2. **(7 punti)** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

a. **(1 punto)** Usando i risultati noti dalla teoria, si stabilisca se esiste ed è unica la soluzine locale del problema assegnato;

b. **(4 punti)** si determini la soluzione locale;

c. **(2 punti)** si determini il piu' grande intervallo di definizione della soluzione locale trovata nel punto precedente.

NOME E COGNOME:

3. **(8 punti)** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^\alpha (x+n)^2 e^{nx}$$

si determini, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

a. **(3 punti)** l'insieme E_α di convergenza semplice;

b. **(3 punti)** si stabilisca per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza é uniforme su E_α.

c. **(2 punti)** Detta $f(x)$ la funzione limite, si stabilisca infine per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{0} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx$$

4. **(8 punti)** Sia

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \ : x = 0 \ , 0 < z < |\log(y)| \ , 0 < y < 1\}$$

e sia D il solido ottenuto facendo compiere ad A una rotazione di 360^o attorno all'asse z.

a. **(3 punti)** Calcolare il volume di D.

b. **(5 punti)** Sia

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \ : x = 0 \ , 0 < z < |\log(y)|\}$$

e sia C il solido ottenuto facendo compiere ad B una rotazione di 360^o attorno all'asse z. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{z^\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

é integrabile su C.