Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
5 Luglio 2021

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(7 punti)** Si considerino le funzioni f, g, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x,y) = xy, \qquad g(x,y) = x^2 - xy + y^2, \qquad h(x,y) = x^2 + y^2 + \log(3 + x^2 + y^2).$$

a. **(4 punti)** Si determinino, se esistono, i punti di massimi e di minimi assoluti di f vincolata a

$$g(x,y) = 1;$$

b. **(3 punti)** Si determinino, se esistono, i punti di massimi e di minimi assoluti di h nella regione

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \geq 0, \, y \geq 0, \, 1 \leq f(x,y) \leq 2\}.$$

2. **(7 punti)** Data la successione di funzioni $\{f_n\}_n$ con $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definta da

$$f_n(x) = \int_x^{nx} \frac{t}{1+t^6} dt$$

a. **(3 punti)** Stabilire l'insieme E di convergenza puntuale di f_n.

b. **(2 punti)** Dimostrare che la convergenza non è uniforme su E.

c. **(2 punti)** Stabilire per quali valori di a la convergenza è uniforme su $[a, +\infty)$.

3. **(8 punti)** Siano

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 \ : \frac{1}{2x} \leq y \leq \frac{1}{x} \ , 3y \leq x^2 \right\}$$

e

$$g(x, y) = \log \left(\frac{x^2}{y} \right) e^{xy}.$$

a. **(1 punto)** Si disegni l'insieme D e si studi il segno di g su D;

b. **(5 punti)** determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, g^α risulta integrabile su D;

b. **(2 punti)** calcolare

$$\int_D [g(x, y)]^{-2} dxdy$$

.

4. **(8 punti)** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + y = \log x \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

a. **(1 punto)** Usando i risultati noti dalla teoria, si stabilisca al variare di $(x_0, y_0, y_1) \in \mathbb{R}^3$ l'esistenza e l'unicitá locale della soluzione del problema assegnato;

b. **(3 punti)** per $x_0 = y_0 = y_1 = 1$, si determinino la soluzione locale, determinandone il massimo intervallo di definizione;

c. **(4 punti)** si determini la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + y = \dfrac{1}{\cos(\log x)} \\ y(1) = y'(1) = 1 \end{cases}$$