Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
5 Luglio 2021

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

1. **(7 punti)** Si considerino le funzioni f, g, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x,y) = xy, \qquad g(x,y) = x^2 - xy + y^2, \qquad h(x,y) = x^2 + y^2 + \log(3 + x^2 + y^2).$$

a. **(4 punti)** Si determinino, se esistono, i punti di massimi e di minimi assoluti di f vincolata a

$$g(x,y) = 1;$$

• $g(x,y) = x^2 - xy + y^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{y \pm \sqrt{-3y^2+4}}{2}$ cioè $-3y^2+4 \geq 0 \Rightarrow |y| \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Stessa cosa per $|x| \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Essendo g continua, il vincolo è compatto → (A questa conclusione si poteva giungere anche notando che il vincolo è un'ellisse)

ed esistono Max e Min assoluti di f vincolata a $g(x,y)=1$

•• $L = f + \lambda g = xy + \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda(2x - y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda(2y - x) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

se $2x - y = 0 \Rightarrow$ impos. ; se $2x - y \neq 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{y}{2x-y}$

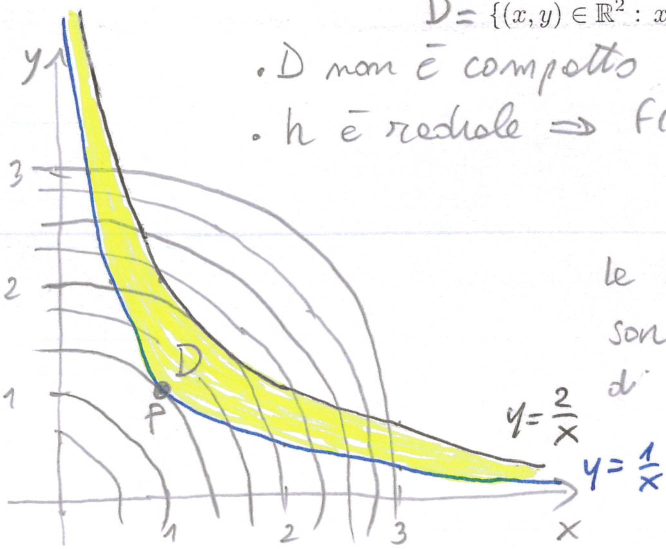
$\Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$

se $x = y \Rightarrow (1,1)$ e $(-1,-1)$ che sono Max

se $x = -y \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ che sono Min

b. **(3 punti)** Si determinino, se esistono, i punti di massimi e di minimi assoluti di h nella regione

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, y \geq 0,\, 1 \leq f(x,y) \leq 2\}.$$



• D non è compatto

• h è radiale $\Rightarrow h(x,y) = F(r) = r^2 + \log(3 + r^2)$ con $x^2 + y^2 = r^2$, F funzione crescente in r

le curve/insiemi di livello di f sono circonferenze centrate nell'origine di raggio crescente al crescere di r.

Quindi il Max non esiste
il Min è il punto $P = (1,1)$

2. **(7 punti)** Data la successione di funzioni $\{f_n\}_n$ con $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defìnta da

$$f_n(x) = \int_x^{nx} \frac{t}{1+t^6}\,dt$$

a. **(3 punti)** Stabilire l'insieme E di convergenza puntuale di f_n.

• $x=0 \Rightarrow f_n(0) = \int_0^0 \frac{t}{1+t^6}\,dt = 0$

•• se $x>0 \Rightarrow f_n(x) = \int_x^{nx} \frac{t}{1+t^6}\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_x^{\infty} \frac{t}{1+t^6}\,dt$ che è finito poiché $\frac{t}{1+t^6} \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{t^5}$ integrabile a $+\infty$

••• se $x<0 \Rightarrow f_n(x) = \int_x^{nx} \frac{t}{1+t^6}\,dt \overset{\text{per disp}}{=} -\int_{nx}^{x} \frac{t}{1+t^6}\,dt \overset{s=-t}{=} -\int_{-nx}^{-x} \frac{s}{1+s^6}\,dt = \int_{-x}^{-nx} \frac{s}{1+s^6}\,ds = f_n(-x)$

$\Rightarrow E=\mathbb{R}$ con funzione limite $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ \int_{|x|}^{\infty} \frac{t}{1+t^6}\,dt & \text{se } x\neq 0 \end{cases}$

b. **(2 punti)** Dimostrare che la convergenza non è uniforme su E.

La funzione limite f non è continua in $0 \in E = \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ non può esserci convergenza uniforme in $[a,b]$
se $a \leq 0 \leq b$. Quindi neanche in tutto $\mathbb{R}$

c. **(2 punti)** Stabilire per quali valori di a la convergenza è uniforme su $[a, +\infty)$.

Per quanto detto sopra cerchiamo la convergenza uniforme in $[a,\infty)$ con $a>0$ fissato

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq a} \left| \int_x^{nx} \cdots - \int_x^{\infty} \cdots \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sup_{x\geq a} \int_{nx}^{\infty} \frac{t}{1+t^6}\,dt}_{\text{Quantità che decresce al crescere di } x} = \lim_{n\to\infty} \int_{na}^{\infty} \frac{t}{1+t^6}\,dt \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \int_{na}^{\infty} \frac{2t}{1+t^4}\,dt =$$

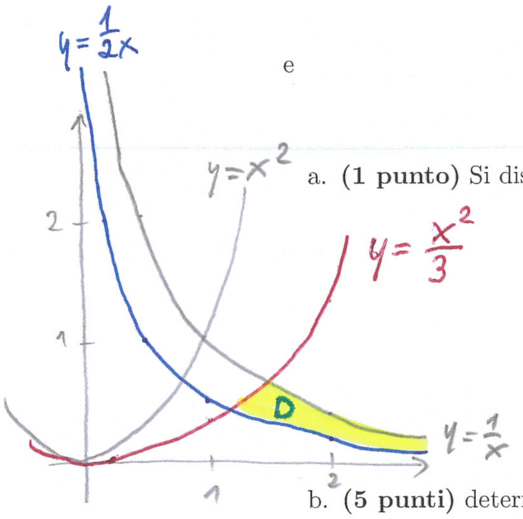
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\operatorname{arctg} t^2 \right]_{na}^{\infty} = 0 \Rightarrow \text{Ho conv. uniforme in } [a,\infty)$$

3. **(8 punti)** Siano

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 \ : \frac{1}{2x} \le y \le \frac{1}{x}\, , 3y \le x^2\right\}$$

e

$$g(x,y) = \log\left(\frac{x^2}{y}\right) e^{xy}.$$



a. **(1 punto)** Si disegni l'insieme D e si studi il segno di g su D;

• D non è compatto

•• $g(x,y) \ge 0 \iff \frac{x^2}{y} \ge 1 \iff 0 < y \le x^2$

$\Rightarrow g > 0$ in D

b. **(5 punti)** determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, g^α risulta integrabile su D;

• Cambio di variabili

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x^2}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} & x & y \\ \hline u & y & x \\ v & \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{array}$$

trasformazione di determinante dello Jacobiano $-\frac{3x^2}{y} = -3v$

•• $$\int_D g^\alpha dxdy = \int_3^{\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{3v} \log^\alpha v \, e^{u\alpha}\, du\, dv =$$

$$= \frac{1}{3} \underbrace{\int_3^{\infty} \frac{\log^\alpha v}{v} dv}_{\text{esiste finito} \iff \alpha < -1} \cdot \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{u\alpha} du}_{\text{esiste finito } \forall \alpha} = \maltese$$

$\Rightarrow \alpha < -1$

b. **(2 punti)** calcolare

$$\int_D [g(x,y)]^{-2} dxdy$$

Per $\alpha = -2$ $$\maltese = \frac{1}{3}\int_3^{\infty} \frac{1}{v \log^2 v} dv \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-2u} du$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{\log v}\right)\Big|_3^{\infty} \left(-\frac{e^{-2u}}{2}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{e^{-1} - e^{-2}}{6 \log 3}$$

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + y = \log x \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

a. (1 punto) Si stabilisca al variare di $(x_0, y_0, y_1) \in \mathbb{R}^3$ l'esistenza e l'unicitá locale della soluzione del problema assegnato;

$y'' = \dfrac{-xy' - y + \log x}{x^2} = f(x, y, y')$ è continua per $x>0$ e $(y, y') \in \mathbb{R}^2$ e lineare in y e y'

e quindi Lipschitz rispetto a y e y'.

$\Rightarrow \forall (x_0, y_1, y_2) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^2$ $\exists!$ la soluzione locale.

b. (3 punti) per $x_0 = y_0 = y_1 = 1$, si determinino la soluzione locale, determinandone il massimo intervallo di definizione;

Pongo $x = e^t > 0$ $z(t) = y(e^t) \Rightarrow z' = y'e^t$, $z'' = y''e^{2t} + y'e^t$

$\Rightarrow z'' + z = t$ in $t > 0$ $\xrightarrow{\text{SOL OMOG}}$ $z = c_1 \sin t + c_2 \cos t$; $\xrightarrow{\text{SOL PART}}$ $z = t$; $z(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + t$

Essendo $t = \ln x \Rightarrow y(x) = c_1 \sin(\ln x) + c_2 \cos(\ln x) + \ln x$

$\Rightarrow y'(x) = c_1 \dfrac{\cos(\ln x)}{x} - c_2 \dfrac{\sin(\ln x)}{x} + \dfrac{1}{x}$

$y(1) = y'(1) = 1 \Rightarrow c_2 = 1, c_1 = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{y(x) = \cos(\ln x) + \ln x \text{ definita in } (0, \infty)}$

c. (4 punti) si determini la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + y = \dfrac{1}{\cos(\log x)} \\ y(1) = y'(1) = 1 \end{cases}$$

Pongo $x = e^t > 0 \Rightarrow z'' + z = \dfrac{1}{\cos t}$ $t > 0$. Soluzione OMOG. ASSOCIATA

$z = c_1 \sin t + c_2 \cos t$

Per trovare la particolare uso variazione costanti arbitrarie:

$\begin{cases} c_1' \sin t + c_2' \cos t = 0 \\ c_1' \cos t - c_2' \sin t = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$ osservo $x_0 = 1$ implica $t = 0$ e $\cos t \neq 0$ in $t = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} c_2' = -c_1' \dfrac{\sin t}{\cos t} \\ c_1' \dfrac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos t} = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases} \Rightarrow c_1 = t$

$c_2 = -\int \dfrac{\sin t}{\cos t} dt = \ln|\cos t| \Rightarrow z = \underbrace{c_1 \sin t + c_2 \cos t}_{\text{SOL OMOG. ASS.}} + \underbrace{t \sin t + \ln|\cos t| \cos t}_{\text{SOL. PARTICOLARE}}$

$\Rightarrow y(x) = c_1 \sin(\ln x) + c_2 \cos(\ln x) + \log x \sin(\ln x) + \ln|\cos(\ln x)| \cos(\ln x)$

$y'(x) = c_1 \dfrac{\cos(\ln x)}{x} - \dfrac{c_2 \sin(\ln x)}{x} + \dfrac{1}{x} \sin(\ln x) + \ln x \dfrac{\cos(\ln x)}{x} - \dfrac{\sin(\ln x)}{x} - \dfrac{\ln|\cos(\ln x)|}{x} \sin(\ln x)$

$y(1) = y'(1) = 1 \Rightarrow c_2 = c_1 = 1$

$\boxed{y(x) = \sin(\ln x) + \cos(\ln x) + \log x \sin(\ln x) + \ln|\cos(\ln x)| \cos(\ln x)}$