Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
7 Giugno 2021

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(7 punti)** Sia

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)\arctan(y\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+4y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di α reale

a. **(3 punti)** f_α é continua in $(0,0)$

b. **(3 punti)** f_α è differenziabile in $(0,0)$

c. **(1 punti)** se $(0,0)$ è un estremo relativo per f_α

2. **(8 punti)** Sia $a > 0$. Si consideri

$$f_{n,a}(x) = \frac{x^n}{n^a + a^n}$$

a. **(4 punti)** Stabilire, al variare di $a \in R^+$ l'insieme E_a di convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,a}(x);$$

b. **(2 punti)** stabilire per quali valori di a la convergenza risulta uniforme su E_a;

c. **(2 punti)** Sia $a = 1$. Calcolare

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,1}(x) \right) \mathrm{d}x$$

con un errore inferiore a 10^{-3}.

3. **(8 punti)** Si consideri l'insieme

$$T = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 \le y \le 2, \; x \ge \frac{1}{2} \right\}.$$

a. **(4 punti)** Sia V_x il solido ottenuto dalla rotazione di T intorno all'asse delle x e sia V_y il solido ottenuto dalla rotazione di T intorno all'asse delle y. Si stabilisca quali dei due solidi V_x e V_y ha volume maggiore.

b. **(4 punti)** Si calcoli il volume di

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 \le y \le 2, \; x \ge \frac{1}{2}, \; 0 \le z \le |\log(xy)| \right\}.$$

4. **(7 punti)** Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' = e^x \sqrt[3]{1-y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Usando i risultati noti dalla teoria, si studi l'esistenza e l'unicitá di soluzioni locali al variare di (x_0, y_0).

b. **(5 punti)** Si determinino tutte le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ nel caso $(x_0, y_0) = (2, 1)$.