Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
7 Giugno 2021

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(7 punti)** Sia

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)\arctan(y\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+4y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di α reale

a. **(3 punti)** f_α é continua in $(0,0)$. Pongo $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ e ricordo che $|\operatorname{arctg} z| \le |z|$

• $|f_\alpha(x,y)| \le \dfrac{r^2|\cos^2\theta - \sin^2\theta|\cdot r\cdot|\sin\theta|\cdot r}{r^{2\alpha}(\cos^2\theta + 4\sin^2\theta)^\alpha} \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0$ per $4-2\alpha>0$, cioè $\alpha<2$ essendo $1 \le \cos^2\theta + 4\sin^2\theta \le 4$

•• Se $\alpha \ge 2$ e scegliendo $x=0$ otteniamo

$f_\alpha(x,y) = \dfrac{-y^2\operatorname{arctg}(y|y|)}{4^\alpha y^{2\alpha}} \not\xrightarrow[y\to 0]{} 0$. Quindi f_α è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha<2$

b. **(3 punti)** f_α è differenziabile in $(0,0)$. Sia $\alpha<2$. Ovviamente $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ essendo f nulla sull'asse y.

$\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_\alpha(0,h)-f_\alpha(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h^2\operatorname{arctg}(h|h|)}{4^\alpha h^{2\alpha+1}}$ esiste finito se e solo se $\alpha<\frac{3}{2}$ e vale 0.

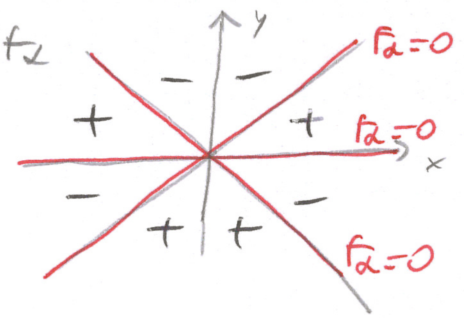
$\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\left|\dfrac{f_\alpha(h_1,h_2)-f_\alpha(0,0)-\nabla f(0,0)(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| \underset{\substack{h_1 = r\cos\theta \\ h_2 = r\sin\theta}}{\le} \lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{r^2|\cos^2\theta-\sin^2\theta|r|\sin\theta|r}{r^{3\alpha}(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)} = 0$

$|\operatorname{tg} z| \le z$ per $\alpha<\frac{3}{2}$

Quindi f_α differenziabile in $(0,0)$ per $\alpha<\frac{3}{2}$

c. **(1 punti)** se $(0,0)$ è un estremo relativo per f_α

Studio il segno di f_α



Poiché $f_\alpha(0,0)=0$ e in un intorno di $(0,0)$ f_α ha segno sia positivo che negativo $\Rightarrow$ $(0,0)$ non è mai estremo

2. **(8 punti)** Sia $a > 0$. Si consideri

$$f_{n,a}(x) = \frac{x^n}{n^a + a^n}$$

È una serie di potenze e chiamo $a_n = \dfrac{1}{n^a + a^n}$

a. **(4 punti)** Stabilire, al variare di $a \in R^+$ l'insieme E_a di convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,a}(x);$$

- $\boxed{\text{Se } 0 < a \leq 1}$, $R = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^a}} = 1 \Rightarrow R = 1$

$f_{n,a}(1) = \dfrac{1}{n^a + a^n} \sim \dfrac{1}{n^a}$ la Σ diverge; $f_{n,a}(-1) = \dfrac{(-1)^n}{n^a + a^n}$ la Σ converge per Teorema di Leibnitz

si osservi che per $g(y) = \dfrac{1}{y^a + a^y}$ si ha $g'(y) < 0$ definitivamente

- $\boxed{\text{Se } a > 1}$, $R = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{a^n}} = a \Rightarrow R = a$

$f_{n,a}(a) = \dfrac{a^n}{n^a + a^n} \sim 1$ la Σ diverge; $f_{n,a}(-a) = \dfrac{(-1)^n a^n}{n^a + a^n} \not\to 0$

Quindi

$$E_a = \begin{cases} [-1, 1) & \text{se } a \in (0, 1] \\ (-a, a) & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

b. **(2 punti)** stabilire per quali valori di a la convergenza risulta uniforme su E_a;

- se $\boxed{0 < a \leq 1}$ mai essendo E_a aperto
- se $\boxed{a > 1}$ " " " "

c. **(2 punti)** Sia $a = 1$. Calcolare

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,1}(x) \right) \mathrm{d}x = S$$

con un errore inferiore a 10^{-3}.

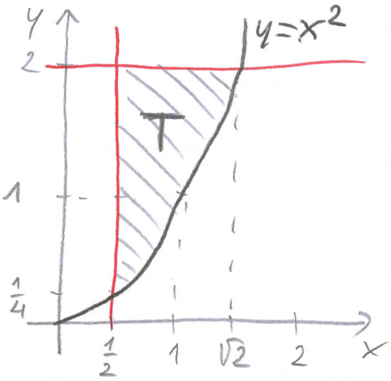
$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{x^n}{n+1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_{-\frac{1}{3}}^{0} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{1}{3^{n+1}(n+1)^2}$$

poiché la $\Sigma f_{n,1}$ converge uniformemente in $[-\frac{1}{3}, 0]$

Essendo una serie numerica a segni alterni

$$\left| S - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+2} \frac{1}{3^{n+1}(n+1)^2} \right| \leq \frac{1}{3^{N+2}(N+2)^2} \leq \frac{1}{1000}$$

Per $N \geq 2$



3. **(8 punti)** Si consideri l'insieme

$$T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2\le y\le 2,\ x\ge\frac{1}{2}\right\}.$$

a. **(4 punti)** Sia V_x il solido ottenuto dalla rotazione di T intorno all'asse delle x e sia V_y il solido ottenuto dalla rotazione di T intorno all'asse delle y. Si stabilisca quali dei due solidi V_x e V_y ha volume maggiore.

Sia $B=(x_B,y_B)$ il baricentro di T.

$Vol(V_x)=2\pi\cdot Area(T)\cdot y_B$; $Vol(V_y)=2\pi\cdot Area(T)\cdot x_B$: quindi

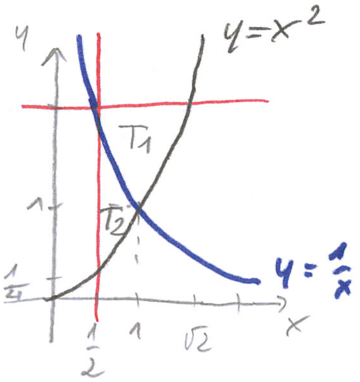
$Vol(V_x)\le Vol(V_y)$ se e solo se $y_B\le x_B$.

$$(x_B,y_B)=\frac{1}{Area(T)}\int_{\frac12}^{\sqrt2}\int_{x^2}^{2}(x,y)\,dy\,dx=\frac{1}{Area(T)}\int_{\frac12}^{\sqrt2}\left(xy,\tfrac12 y^2\right)\Big|_{x^2}^{2}dx=$$

$$=\frac{1}{Area(T)}\left(x^2-\frac14x^4,\ 2x-\frac{1}{10}x^5\right)\Big|_{\frac12}^{\sqrt2}=\frac{1}{Area(T)}\left(\underbrace{\frac{49}{64}}_{<1},\ \underbrace{\frac85\sqrt2-\frac{319}{320}}_{>1}\right)$$

b. **(4 punti)** Si calcoli il volume di $\boxed{\text{Quindi } Vol(V_x)>Vol(V_y)}$

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2\le y\le 2,\ x\ge\frac{1}{2},\ 0\le z\le|\log(xy)|\right\}.$$



$$Vol(A)=\int_0^{|\log(xy)|}\left(\int_T dx\,dy\right)dz=$$

$T=T_1\cup T_2$

$\log(xy)\ge 0$ su T_1

$\log(xy)\le 0$ su T_2

$$=\int_{T_1}\log(xy)\,dx\,dy-\int_{T_2}\log(xy)\,dx\,dy=$$

$$=\int_1^2\int_{\frac1y}^{\sqrt y}\log(xy)\,dx\,dy-\int_{\frac12}^{1}\int_{x^2}^{\frac1x}\log(xy)\,dy\,dx=$$

$$=\int_1^2\left(\frac32\sqrt y\log y-\sqrt y+\frac1y\right)dy-\int_{\frac12}^{1}\left(-\frac1x-3x^2\log x+x^2\right)dx=$$

$$=\left(2\sqrt2+\frac{17}{8}\right)\log 2-\frac83\sqrt2+\frac34$$

N.B. Osservando bene la figura T si poteva dedurre, senza conti, che $x_B<y_B$

4. **(7 punti)** Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' = e^x \sqrt[3]{1-y} & = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Usando i risultati noti dalla teoria, si studi l'esistenza e l'unicitá di soluzioni locali al variare di (x_0, y_0).

• $\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ con $y_0 \neq 1$, $\exists!$ la soluzione locale del problema essendo $f(x,y)$ continua con derivate continue (quindi Lip) in un intorno di (x_0,y_0)

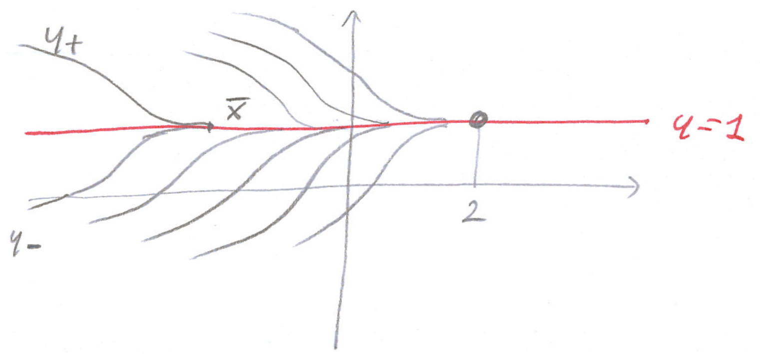
•• Per $y_0 = 1$, esiste certamente la soluzione $y(x) = 1$. Nulla possiamo dire sull'unicità.

b. **(5 punti)** Si determinino tutte le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ nel caso $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

• $\dfrac{dy}{dx} = e^x \sqrt[3]{1-y} \underset{y\neq 1}{\Longrightarrow} \displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt[3]{1-y}} = \int e^x dx + c \Rightarrow$

$-\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{2}{3}} = e^x + c$ che ha senso solo per $e^x + c \leq 0$, cioè $x \leq \ln(-c)$

Otteniamo $y_\pm(x) = 1 \pm \left[-\frac{2}{3}\left(e^x + c\right)\right]^{3/2}$ in $x \leq \ln(-c) = \bar{x}$ (cioè $c = -e^{\bar{x}}$)



Si noti che
- $y_+ \geq 1$, $y_- \leq 1$
- $y_\pm'(\bar{x}) = 0$ e quindi

si attaccano bene a $y(x) = 1$

Tutte le soluzioni sono quindi

$$y_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq \bar{x} \\ 1 + \left[-\frac{2}{3}\left(e^x - e^{\bar{x}}\right)\right]^{3/2} & \text{se } x < \bar{x} \end{cases} \qquad \forall \bar{x} \leq 2$$

e

$$y_-(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq \bar{x} \\ 1 - \left[-\frac{2}{3}\left(e^x - e^{\bar{x}}\right)\right]^{3/2} & \text{se } x < \bar{x} \end{cases} \qquad \forall \bar{x} \leq 2$$