Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PRIMA PROVA PARZIALE – 6 Dicembre 2019

FILA A

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

1. **(8 punti)** Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^4}{4x^4+9y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a. **(3 punti)** Si stabilisca se f è continua in $\mathbb{R}^2$;

   b. **(3 punti)** si calcolino tutte le derivate direzionali nell'origine;

   c. **(2 punti)** si studi la differenziabilitá della funzione f nell'origine.

2. **(8 punti)** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \sqrt[4]{|x - y|}e^{-x^2-y^2}.$$

a. **(4 punti)** Si determinino i massimi e i minimi assoluti di f in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 8x^2 + 8y^2 \leq 1\}.$$

b. **(4 punti)** Si tracci un grafico qualitativo locale (individuando la retta tangente e la concavitá/convessitá) della curva di livello di f passante per $(1, 0)$.

3. **(6 punti)** Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

dove

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Se ne determini il raggio di convergenza.

b. **(3 punti)** Si determinino gli insiemi di convergenza uniforme.

4. **(4 punti)** Si calcoli, con errore inferiore a 10^{-3},

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^9}\,\mathrm{d}x.$$

5. **(8 punti)** Si consideri la successione di funzioni $\{f_n^a\}_{n=1}^{\infty}$ definita da

$$f_n^a(x) = n^a \arctan\left(\frac{x}{n}\right).$$

a. **(4 punti)** Si determini, al variare di a, l'insieme di convergenza puntuale E_a di $\{f_n^a\}_{n=1}^{\infty}$.

b. **(4 punti)** Si stabilisca se la convergenza risulta uniforme su E_a.

Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PRIMA PROVA PARZIALE – 6 Dicembre 2019

FILA B

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

1. **(8 punti)** Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y^3}{2x^4 + 16y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a. **(3 punti)** Si stabilisca se f è continua in $\mathbb{R}^2$;

   b. **(3 punti)** si calcolino tutte le derivate direzionali nell'origine;

   c. **(2 punti)** si studi la differenziabilitá della funzione f nell'origine.

2. **(8 punti)** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \sqrt[4]{|x+y|}\, e^{-x^2-y^2}.$$

a. **(4 punti)** Si determinino i massimi e i minimi assoluti di f in

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 8x^2 + 8y^2 \leq 1\}.$$

b. **(4 punti)** Si tracci un grafico qualitativo locale (individuando la retta tangente e la concavitá/convessitá) della curva di livello di f passante per $(0,1)$.

3. **(6 punti)** Si consideri la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1}$$
dove
$$a_n = \begin{cases} n^2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Se ne determini il raggio di convergenza.

b. **(3 punti)** Si determinino gli insiemi di convergenza uniforme.

4. **(4 punti)** Si calcoli, con errore inferiore a 10^{-3},
$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^{12}}\,\mathrm{d}x.$$

5. **(8 punti)** Si consideri la successione di funzioni $\{f_n^a\}_{n=1}^{\infty}$ definita da

$$f_n^a(x) = n \arctan\left(\frac{x}{n^a}\right).$$

a. **(4 punti)** Si determini, al variare di a, l'insieme di convergenza puntuale E_a di $\{f_n^a\}_{n=1}^{\infty}$.

b. **(4 punti)** Si stabilisca se la convergenza risulta uniforme su E_a.