Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
SECONDA PROVA PARZIALE – 28 Gennaio 2020

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(6 punti)** Siano
$$f(x,y,z) = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$
e $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2+y^2 < z^2 < 1\}$. Stabilire se esiste
$$\int_D f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$
e in caso affermativo calcolarlo.

2. **(8 punti)** Sia, per ogni $r \geq 0$,

$$A(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \ ; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2zr\}.$$

a. **(5 punti)** Calcolare $mis(A(r))$, cioè la misura di $A(r)$.

b. **(3 punti)** Detta $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definita da $g(r) = \frac{1}{mis(A(r))}$, stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$(x, y, z) \mapsto \left[g \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \right]^{\alpha}$$

risulta integrabile sulla sfera unitaria.

3. **(6 punti)** Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 25x^2y'' + 25xy' - 36y = 11x \\ y(1) = a \\ y'(1) = b \end{cases}$$

   a. **(3 punti)** Si stabilisca, al variare di $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, se esiste unica la soluzione locale e in caso affermativo determinarla;

   b. **(3 punti)** stabilire se esistono valori di (a, b) per cui la soluzione locale é definita su tutto $\mathbb{R}$ e discuterne l'eventuale unicitá;

4. **(5 punti)** Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicitá della soluzione locale del seguente problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t}{y} + \dfrac{2y}{t} \\ y(1) = -2 \end{cases}$$

   la si determini.

4. **(9 punti)** Si determini la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

a. **(3 punti)**

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$$

b. **(3 punti)**

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y + t \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

c. **(3 punti)**

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y + \dfrac{e^{2t}}{t+1} \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$