Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
28 Gennaio 2020

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(7 punti)** Siano
$$f(x,y,z) = \frac{|z|}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$
e $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2+y^2 < z^2 < 1\}$. Stabilire se esiste
$$\int_D f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$
e in caso affermativo calcolarlo.

Si osservi che $f(x,y,z) = f(x,y,-z) \geq 0 \quad \forall (x,y,z) \in D$

Detto $D^+ = \{(x,y,z) \in D : z \geq \}$ si ha che $\int_D f = 2 \int_{D^+} f$

Posto $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ e $D' = \{(\rho,\theta,z) : z \geq 0; \ \rho^2 < z^2 < 1 ; 0 \leq \theta < 2\pi\}$

risulta
$$\int_{D^+} f = \int_{D'} \frac{z}{\rho^2+z^2} = 2\pi \int_0^1 z\,dz \int_0^z \frac{1}{\rho^2+z^2}d\rho = 2\pi \int_0^1 z\,dz \left[\frac{1}{z}\arctan\frac{\rho}{z}\right]_0^z =$$
$$= 2\pi \int_0^1 \arctan 1\, dz = \frac{\pi^2}{2}$$

Quindi l'integrale richiesto vale π^2

CONCLUSIONE del punto c:

A e B sono massimi relativi, i due assi cartesiani e la curva di equazione $y^2=x+3$ sono minimi assoluti

2. **(7 punti)** Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\sqrt[5]{x^2y^2(x-y^2+3)^2}$$

a. **(3 punti)** Si stabilisca se f é differenziabile nell'origine.

Se f fosse differenziabile in $(0,0)$ la funzione $f(x,x)$ sarebbe derivabile in 0. Ma $f(x,x)=\sqrt[5]{x^4(3+x-x^2)^2}$ che NON è differenziabile in 0.

b. **(1 punti)** Si determino, se esistono, estremo superiore, estremo inferiore, massimo assoluto e minimo assoluto della funzione nel suo domino.

è evidente che $f(x,y)\geq 0 \ \forall (x,y)$ quindi dove si annulla abbiamo dei minimi assoluti. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} f(x,x)=+\infty$ quindi

$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=+\infty$ $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=0$ che è minimo assoluto.

c. **(3 punti)** Si determino, se esistono, massimi e minimi locali della funzione nel suo domino.

poiché $f(x,y)=\left[xy(x-y^2+3)\right]^{2/5}$ e poiché la funzione $t\to t^{2/5}$ è crescente su $\mathbb{R}^+$, se $xy(x-y^2+3)\geq 0$, i massimi/minimi di $f(x,y)$ sono gli stessi della funzione $g(x,y)=xy(x-y^2+3)$. Il caso $xy(x-y^2+3)<0$ è analogo per simmetria.

$$\begin{cases} g_x = y(x-y^2+3)+xy=0 \\ g_y = x(x-y^2+3)+xy(-2y)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\left[x-y^2+3+x\right]=0 \\ x\left[x-y^2+3-2y^2\right]=0 \end{cases}$$

oltre alle ovvie soluzioni $(0,0)$, $(-3,0)$; $(0,\pm\sqrt{3})$

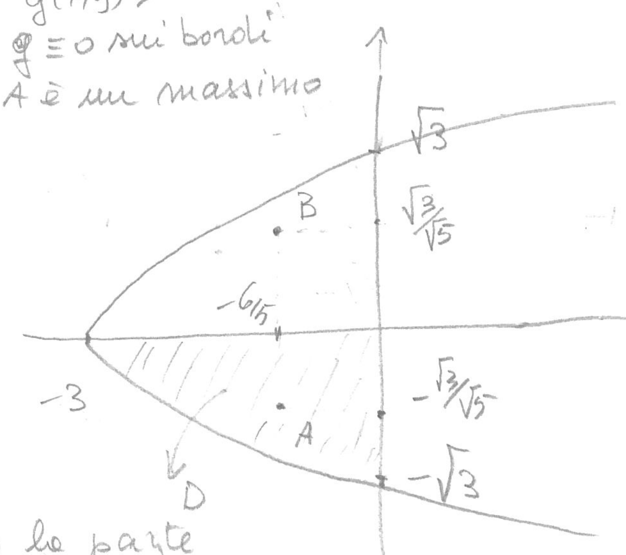
abbiamo

$x-y^2+3=-x=2y^2$ cioè $x+\frac{x}{2}+3+x=0$

$x=-\frac{6}{5}$ $y=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$

$A\equiv\left(-\frac{6}{5},-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ $B\equiv\left(-\frac{6}{5},+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

In D $g(x,y)\geq 0$
inoltre $g\equiv 0$ sui bordi
Quindi A è un massimo relativo



Sia D la parte tratteggiata

3. **(6 punti)** Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 25x^2y'' + 25xy' - 36y = 11x \quad ⊛ \\ y(1) = a \\ y'(1) = b \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si stabilisca, al variare di $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, se esiste unica la soluzione locale e in caso affermativo determinarla;

• Poiché $y'' = \frac{1}{25x^2}(-25xy' + 36y + 11x) = f(x,y,y')$ è continua nelle variabili (x,y,y') e Lipschitz localmente nelle variabili (y,y') in un intorno del punto $(1,a,b)$, $\Rightarrow \exists!$ la soluzione locale.

•• Poniamo $x = e^t > 0$ e $z(t) = y(e^t) \Rightarrow z' = y'x$ e $z'' = x^2y'' + xy'$ da cui ⊛ diventa

$25z'' - 36z = 11e^t \to$ SOL. OMOG. ASS. $25z'' - 36z = 0 \Rightarrow z(t) = c_1 e^{6/5 t} + c_2 e^{-6/5 t}$

↳ SOL PART. della forma $z = Ae^t$ si ottiene $A = -1$

Quindi $z = c_1 e^{6/5 t} + c_2 e^{-6/5 t} - e^t \Rightarrow \boxed{y(x) \overset{*}{=} c_1 x^{6/5} + c_2 x^{-6/5} - x \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ è soluzione in } x>0 \text{ di } ⊛}$

b. **(3 punti)** stabilire se esistono valori di (a, b) per cui la soluzione locale é definita su tutto $\mathbb{R}$ e discuterne l'eventuale unicitá;

• Per $x<0$ le soluzione di ⊛ le otteniamo ponendo $x = -e^{t}$, $z(t) = y(-e^t)$ da cui $z' = y'x$ e $z'' = x^2y'' + xy'$. L'integrale generale è (per conti analoghi) $\boxed{y(x) \overset{**}{=} \tilde{c}_1 x^{6/5} + \tilde{c}_2 x^{-6/5} - x \quad \forall \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}}$ è soluzione in $x<0$ di ⊛

le uniche soluzioni di $*$ e $**$ che possono essere definite in $x=0$ con regolarità C^2 si hanno per $c_1 = c_2 = \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$, cioè $y(x) = -x$. Non ci sono altre possibilità. Per cui $a=-1$ e $b=-1$ è l'unico caso in cui la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

•• le condizioni $y(1)=a$ e $y'(1)=b$ permettono di ricavare c_1 e c_2:
$\boxed{y(x) = \left(\frac{1}{2}a + \frac{5}{12}b + \frac{11}{12}\right)x^{6/5} + \left(\frac{1}{2}a - \frac{5}{12}b + \frac{1}{12}\right)x^{-6/5} - x}$ è soluzione locale del prob. di Cauchy

4. **(5 punti)** Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicitá della soluzione locale del seguente problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t}{y} + \dfrac{2y}{t} \\ y(1) = -2 \end{cases} .$$

la si determini.

• Poiché $F(t,y) = \frac{t}{y} + \frac{2y}{t}$ è loc continua in $(-2,1)$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{t}{y^2} + \frac{2}{t}$ è loc. continua in $(-2,1) \Rightarrow \exists!$ la soluzione locale

•• Pongo $z = \frac{y}{t} \Rightarrow y = zt$ e $y' = z't + z$ da cui $tz' = \frac{1+z^2}{z}$

cioè $\int \frac{z\,dz}{1+z^2} = \int \frac{1}{t}\,dt$ se $t \neq 0 \Rightarrow \sqrt{1+z^2} = |t|e^c$ $c \in \mathbb{R}$

La condizione $y(1) = -2$ implica $z(1) = -2 \Rightarrow$ cercando una soluzione in un intorno di $t = 1 > 0$ $\sqrt{1+z^2} = \sqrt{5}\,t \Rightarrow z = -\sqrt{5t^2-1}$

scelgo $-$ essendo $z(1) = -2$

Quindi $y = -t\sqrt{5t^2-1}$ è soluzione locale del prob. di Cauchy

5. **(7 punti)** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt[n]{|x|}e^{nx},$$

a **(2 punti)** si determini l'insieme E di convergenza semplice e la funzione limite.

$f_n(0)=0$ $\forall n$. Se $x \neq 0$ $f_n(x)$ converge $\iff$ $x<0$. La funzione limite vale zero per $x \leq 0$, non esiste per $x>0$.

b **(3 punti)** Si stabilisca se la convergenza é uniforme su E.

$$f_n'(x) = (\mathrm{sig}\,x)\frac{|x|^{\frac{1}{n}-1}}{n} e^{nx} + n|x|^{1/n} e^{nx} = |x|^{1/n} e^{nx}\left[\frac{\mathrm{sig}\,x}{n|x|} + n\right] = |x|^{1/n} e^{nx}\left[\frac{1}{nx} + n\right]$$

$f_n'(x) > 0 \iff x < -\frac{1}{n^2}$ $\quad f_n(-1/n^2) = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\, e^{-1/n} \not\to 0$ per $n \to +\infty$

quindi non c'è convergenza uniforme in $(-\infty, 0]$

c **(2 punti)** Si determinino tutti gli eventuali insiemi di convergenza uniforme.

Sia $a<0$. Definitivamente risulta

$$f_n(x) \leq f_n(a) \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

Quindi ho convergenza uniforme in $(-\infty, a]$ $\forall a<0$