Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
25 settembre 2020

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

1. (**8 punti**) Siano

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

e

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2yz + 2z^2.$$

a. (**4 punti**) Dimostrare che f è una forma quadratica definita positiva su $\mathbb{R}^3$;

$$f(x,y,z) = (x,y,z)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\underline{I^o \text{ modo}}$ con i minori di N-W di A

$\det(2) = 2 > 0$

$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$

$\det A = 4$

Quindi essendo tutti positivi è vero

$\underline{II^o \text{ modo}}$ studio autovalori di A

$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 2$, $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$ sono tutti positivi, quindi è vero

b. (**4 punti**) stabilire quindi il massimo e il minimo assoluti di $1/f$ su S.

$\frac{1}{f}$ è continua su S compatto, essendo $f > 0$ in $\mathbb{R}^3$, quindi $\exists$ Max e Min; inoltre, essendo S la sfera unitaria,

$$\underset{(x,y,z)\in S}{\text{Max}} \frac{1}{f(x,y,z)} = \left[\underset{(x,y,z)\in S}{\text{Min}} f(x,y,z)\right]^{-1} = \left[\text{Min}\{\text{insieme autovalori di } A\}\right]^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

$$\underset{(x,y,z)\in S}{\text{Min}} \frac{1}{f(x,y,z)} = \left[\underset{(x,y,z)\in S}{\text{Max}} f(x,y,z)\right]^{-1} = \left[\text{Max}\{\text{insieme autovalori di } A\}\right]^{-1} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

2. (**8 punti**) Si consideri

$$f_{n,\alpha}(x) = \frac{x^n}{n^\alpha(1+x^{2n})}.$$

a. (**3 punti**) Stabilire, al variare del parametro reale α, l'insieme E_α di convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,\alpha}(x);$$

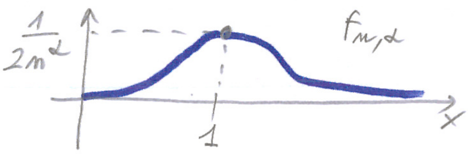
- $x=0 \Rightarrow f_{n,\alpha}(0)=0 \Rightarrow$ converge
- se $|x|<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n,\alpha}(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n^\alpha}$ che converge $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ed essendo la convergenza assoluta implicare quella semplice, $\Rightarrow$ converge
- se $|x|>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n,\alpha}(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha |x|^n}$ che converge $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ converge
- se $x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha>1$
- se $x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha>0$

IN CONCLUSIONE

$$E_\alpha = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } \alpha>1 \\ \mathbb{R}\setminus\{1\} & \text{se } \alpha\in[0,1] \\ \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} & \text{se } \alpha\leq 0 \end{cases}$$

b. (**3 punti**) stabilire per quali valori di α la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,\alpha}(x)$ risulta uniforme su $E_\alpha \cap \mathbb{R}^+$;

$$f'_{n,\alpha}(x) = \frac{1}{n^\alpha} \frac{n x^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2} \Rightarrow$$



N.B. $f_{n,\alpha} \geq 0$ in $\mathbb{R}^+$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} f_{n,\alpha}(x) = f_{n,\alpha}(1) = \frac{1}{2n^\alpha}$$

$\Rightarrow$ Ho convergenza uniforme solo per $\alpha>1$.

c. (**2 punti**) per $\alpha = 0$, si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_{n,0}(x)dx.$$

In $[0,1]$

$$f_{n,0}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{se } x\in[0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{se } x=1 \end{cases} \Rightarrow \{f_{n,0}(x)\} \text{ non converge uniformemente in } [0,1].$$

Ma, essendo $f_{n,0}(x) \geq 0$ in $[0,1] \Rightarrow$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_{n,0}(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1}\right|_0^1 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_{n,0}(x)dx = 0$$

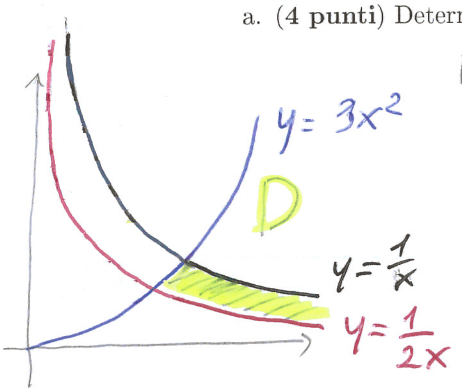
3. (**8 punti**) Siano

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \frac{1}{2x} \le y \le \frac{1}{x} \ ; y \le 3x^2 \right\} \Rightarrow x>0 \text{ e } y>0$$

e

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y} e^{xy}$$

a. (**4 punti**) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ $[f(x,y)]^\alpha$ risulta integrabile in D;



$f>0$ in D, ma D è illimitato.

Pongo $\begin{cases} u = yx \\ t = \frac{x^2}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{ut} \\ y = \sqrt[3]{\frac{u^2}{t}} \end{cases}$ e il determinante dello Jacobiano è $-\frac{1}{3t}$

Otteniamo

$$\int_D (f(x,y))^\alpha dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{\frac{1}{3}}^{\infty} \frac{1}{3t} e^{\alpha u} t^\alpha \, dt\, du =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{1/2}^{1} e^{\alpha u} du \int_{\frac{1}{3}}^{\infty} t^{\alpha-1} dt.$$ Il primo integrale (proprio) esiste finito $\forall \alpha$. Il secondo è improprio ed esiste finito se e solo se $\alpha<0$

b. (**4 punti**) calcolare quindi

$$\int_D \frac{1}{f(x,y)} dx\, dy.$$

$$\int_D f(x,y)^{-1} dx\,dy = \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-u} du \int_{\frac{1}{3}}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{3} \cdot \left(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}\right) \cdot 3 = \frac{\sqrt{e}-1}{e}$$

conti precedenti

4. (**8 punti**) Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' - \frac{7}{3}xy' + y = x^2 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = a \end{cases} \Rightarrow y'' = F(x,y,y') = \frac{7}{3}\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} + 1$$

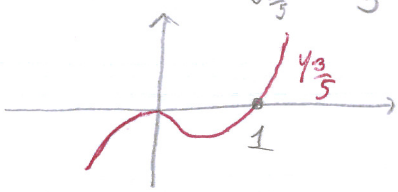
a. (**3 punti**) stabilirne per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ è garantita l'esistenza e l'unicità locale della soluzione y_a del problema e determinarla;

- F è continua e Lipschitz localmente in $(1,0,a) \Rightarrow \exists!$ la soluzione locale $\forall a$.
- Pongo $x = e^t > 0$ e $z(t) = y_a(e^t)$ otteniamo $z''(t) - \frac{10}{3}z'(t) + z(t) = e^{2t}$ che ha come soluzione dell'omogenea associata $z(t) = c_1 e^{1/3\, t} + c_2 e^{3t}$ e soluzione particolare $z(t) = -\frac{3}{5}e^{2t}$. Quindi $y_a(x) = c_1\sqrt[3]{x} + c_2x^3 - \frac{3}{5}x^2$

Infine $\begin{matrix} y(1)=0 \\ y'(1)=a \end{matrix} \Rightarrow y_a(x) = \left(\frac{9}{40} - \frac{3}{8}a\right)\sqrt[3]{x} + \frac{3}{8}(a+1)x^3 - \frac{3}{5}x^2$ è la soluzione locale cercata

b. (**2 punti**) stabilire se esistono dei valori di a per cui y_a è definita su tutto $\mathbb{R}$ e in caso affermativo determinarli;

L'espressione trovata di y_a è una funzione C^2 su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $c_1 = \left(\frac{9}{40} - \frac{3}{8}a\right) = 0 \iff a = \frac{3}{5}$ e otteniamo $y_{\frac{3}{5}}(x) = \frac{3}{5}(x^3 - x^2)$



c. (**3 punti**) per i valori di a per i quali esiste almeno una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$ (punto precedente), si discuta l'unicità di tale soluzione determinando tutte le soluzioni possibili definite sempre su tutto $\mathbb{R}$.

Nel problema $\begin{cases} y'' = \frac{7}{3}\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} + 1 \\ y(x_0) = \alpha \\ y(x_0) = \beta \end{cases}$ l'esistenza e unicità è garantita sempre tranne se $x_0 = 0$

In $x<0$ le soluzioni sono sempre della forma $y(x) = \tilde{c}_1\sqrt[3]{x} + \tilde{c}_2x^3 - \frac{3}{5}x^2$. Queste sono C^2 in un intorno dell'origine se e solo se $\tilde{c}_1 = 0$. Si vede che

$$y(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}(x^3 - x^2) & \text{se } x \geq 0 \\ \tilde{c}_2x^3 - \frac{3}{5}x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

sono, per ogni $\tilde{c}_2 \in \mathbb{R}$, funzioni C^2 e soluzioni