Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
SECONDA PROVA PARZIALE – 28 Gennaio 2020

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(6 punti)** Siano

$$f(x,y,z) = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

e $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2+y^2 < z^2 < 1\}$. Stabilire se esiste

$$\int_D f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

e in caso affermativo calcolarlo.

Poiché $f(x,y,z) = -f(x,y,-z)$ e il dominio è simmetrico rispetto a z, se l'integrale esiste vale 0. Studiamo quindi il caso $f(x,y,z) \geq 0$. Posto

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$ studio $D' = \{(\rho,\theta,z) : 0 \leq z \ ; \ \rho^2 < z^2 < 1 \ ; \ 0 \leq \theta < 2\pi\}$

e $F(\rho,\theta,z) = \dfrac{z}{(\rho^2+z^2)\rho} \cdot \rho$

$$\int_{D'} F(\rho,\theta,z) = 2\pi \int_0^1 dz \cdot z \cdot \int_0^z \frac{1}{\rho^2+z^2}\,d\rho = 2\pi \int_0^1 z\,dz \left[\frac{1}{z}\operatorname{arctg}\frac{\rho}{z}\right]_0^z =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{\pi}{4}\,dz = \frac{\pi^2}{2}.$$ Quindi la funzione è integrabile e l'integrale proposto vale zero.

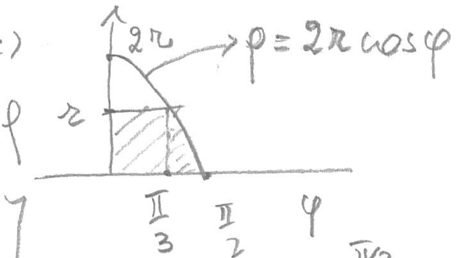
2. **(8 punti)** Sia, per ogni $r \ge 0$,

$$A(r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2+y^2+z^2 \le r^2 \,; x^2+y^2+z^2 \le 2zr\}.$$

a. **(5 punti)** Calcolare $mis(A(r))$, cioè la misura di $A(r)$.

posto $\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$ ad $A(r)$ corrisponde: $\begin{cases} \rho^2 \le r^2 \\ \rho^2 \le 2(\rho\cos\varphi) r \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases} = \begin{cases} 0 \le \rho \le r \\ \rho \le 2r\cos\varphi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \,; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$mis(A(r)) = 2\pi \int_{A'(r)} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi$ dove $A'(r)$



$$mis(A(r)) = 2\pi \left[\int_0^{\pi/3} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^r \rho^2 d\rho + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2r\cos\varphi} \rho^2 d\rho \right] = 2\pi \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{r^3}{3} + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin\varphi \cdot \frac{8r^3\cos^3\varphi}{3} d\varphi \right]$$

b. **(3 punti)** Detta $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $g(r) = \frac{1}{mis(A(r))}$, stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$(x,y,z) \mapsto \left[g\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} \right) \right]^\alpha$$

risulta integrabile sulla sfera unitaria.

$$mis(A(r)) = 2\pi \left[\frac{r^3}{6} + \frac{8r^3}{3} \cdot \frac{1}{2^6} \right] = \pi r^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} \right] = k r^3 \text{ dove } k = \pi \left(\frac{2^2+1}{3 \cdot 2^2} \right)$$

e $g(r) = \frac{1}{kr^3}$. Detta $B(0,1)$ la sfera unitaria, si chiede quando esiste

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{3\alpha}}$$

. Passando nuovamente in coordinate sferiche otteniamo:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^2 \sin\varphi}{\rho^{3\alpha}} d\rho.$$

L'unico integrale che dà problemi è quello rispetto a ρ: $\int_0^1 \frac{1}{\rho^{3\alpha-2}}$

esiste finito $\iff 3\alpha - 2 < 1$ cioè $\alpha < 1$

3. **(6 punti)** Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 25x^2y'' + 25xy' - 36y = 11x & (*) \\ y(1) = a \\ y'(1) = b \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si stabilisca, al variare di $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, se esiste unica la soluzione locale e in caso affermativo determinarla;

• Poiché $y'' = \frac{1}{25x^2}(-25xy' + 36y + 11x) = f(x, y, y')$ è continua nelle variabili (x, y, y') e Lipschitz localmente nelle variabili (y, y') in un intorno del punto $(1, a, b)$, $\Rightarrow \exists!$ la soluzione locale.

•• Poniamo $x = e^t > 0$ e $z(t) = y(e^t) \Rightarrow z' = y'x$ e $z'' = x^2y'' + xy'$ da cui $(*)$ diventa $25z'' - 36z = 11e^t \to$ SOL. OMOG. ASS. $25z'' - 36z = 0 \Rightarrow z(t) = c_1 e^{6/5 t} + c_2 e^{-6/5 t}$

$\hookrightarrow$ SOL. PART. della forma $z = Ae^t$ si ottiene $A = -1$

Quindi $z = c_1 e^{6/5 t} + c_2 e^{-6/5 t} - e^t \Rightarrow \boxed{y(x) \overset{*}{=} c_1 x^{6/5} + c_2 x^{-6/5} - x \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$ è soluzione in $x > 0$ di $(*)$

•• le condizioni $y(1) = a$ e $y'(1) = b$ permettono di ricavare c_1 e c_2: $\boxed{y(x) = \left(\frac{1}{2}a + \frac{5}{12}b + \frac{11}{12}\right)x^{6/5} + \left(\frac{1}{2}a - \frac{5}{12}b + \frac{1}{12}\right)x^{-6/5} - x}$ è soluzione locale del prob. di Cauchy

b. **(3 punti)** stabilire se esistono valori di (a, b) per cui la soluzione locale é definita su tutto $\mathbb{R}$ e discuterne l'eventuale unicitá;

• Per $x < 0$ la soluzione di $(*)$ la otteniamo ponendo $x = -e^{+t}$, $z(t) = y(-e^t)$ da cui $z' = y'x$ e $z'' = x^2y'' + xy'$. L'integrale generale è (per conti analoghi) $\boxed{y(x) \overset{**}{=} \tilde{c}_1 x^{6/5} + \tilde{c}_2 x^{-6/5} - x \quad \forall \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}}$ è soluzione in $x < 0$ di $(*)$

le uniche soluzioni di $*$ e $**$ che possono essere definite in $x = 0$ con regolarità C^2 si hanno per $c_1 = c_2 = \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$, cioè $y(x) = -x$. Non ci sono altre possibilità. Per cui $a = -1$ e $b = -1$ è l'unico caso in cui la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

4. **(5 punti)** Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicitá della soluzione locale del seguente problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t}{y} + \dfrac{2y}{t} \\ y(1) = -2 \end{cases}.$$

la si determini.

• Poiché $f(t, y) = \frac{t}{y} + \frac{2y}{t}$ è loc. continua in $(-2, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{t}{y^2} + \frac{2}{t}$ è loc. continua in $(-2, 1) \Rightarrow \exists!$ la soluzione locale

•• Pongo $z = \frac{y}{t} \Rightarrow y = zt$ e $y' = z't + z$ da cui $tz' = \frac{1 + z^2}{z}$

cioè $\int \frac{z\,dz}{1 + z^2} = \int \frac{1}{t}\,dt$ se $t \neq 0 \Rightarrow \sqrt{1 + z^2} = |t|e^c \quad c \in \mathbb{R}$

la condizione $y(1) = -2$ implica $z(1) = -2 \Rightarrow$ cercando una soluzione in un intorno di $t = 1 > 0$ $\sqrt{1 + z^2} = \sqrt{5}\,t \Rightarrow z = -\sqrt{5t^2 - 1}$

scelgo − essendo $z(1) = -2$

Quindi $y = -t\sqrt{5t^2 - 1}$

è soluzione locale del prob. di Cauchy

4. **(9 punti)** Si determini la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

a. **(3 punti)**

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$$

I° MODO $x'' = 2x' + y' = 2x' + 2y = 2x' + 2(x' - 2x)$

$\Rightarrow x'' - 4x' + 4x = 0$. Polin. caratteristico è

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ MOLT. 2

$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} \\ y = x' - 2x = \dots = c_2 e^{2t} \end{cases}$ $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ✱

$y(0) = x(0) = 1 \Rightarrow c_1 = c_2 = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} x = e^{2t}(1+t) \\ y = e^{2t} \end{cases}$ sol. Prob Cauchy

II° MODO $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}^{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ molt. algebrica 2

$(A - 2I)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = 0, \ \forall a$. Un autovettore è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e $\lambda = 2$ è NON regolare. Cerco autovettore generalizzato

$(A - 2I)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d = 1, \ \forall c$. Un autov. gen è $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} \\ y = c_2 e^{2t} \end{cases}$ ✱

$x(0) = y(0) = 1$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 1$

b. **(3 punti)**

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y + t \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

I° MODO $x'' = 2x' + y' = \dots = \dots$

$\Rightarrow x'' - 4x' + 4x = t$

SOL OMOG ASSOC. è $x = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$

SOL. PART. in $\tilde{x} = (At + B) \Rightarrow \tilde{x} = \frac{1}{4}(t+1)$

$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{1}{4}(t+1) \\ y = x' - 2x = \dots = c_2 e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \end{cases}$ $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$x(0) = y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{4}$ $c_2 = \frac{1}{4}$ Quindi

$\begin{cases} x = \frac{1}{4} e^{2t}(-1 + t) + \frac{1}{4}(t+1) \\ y = \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \end{cases}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ha come integrale generale ✱

Cerco una particolare nella $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix}$

ottengo $\begin{cases} (-2B - D)t + (B - 2A - C) = 0 \\ (2D + 1)t + (D - 2C) = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{1}{4}, \ C = -\frac{1}{4}, \ D = -\frac{1}{2}$

Da cui $\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{1}{4}(t+1) \\ y = c_2 e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \end{cases}$ $\forall c_1, c_2$ è soluz. del sistema

$x(0) = y(0) = 1$

c. **(3 punti)**

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y + \dfrac{e^{2t}}{t+1} \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

- $x'' = 2x' + y' = \dots \Rightarrow x'' - 4x' + 4x = \dfrac{e^{2t}}{t+1}$
  - SOL OMOG ASS. $x = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$
  - SOL PART. uso variazioni costanti arbitrarie

- Cerco soluzione particolare $\tilde{x} = \tilde{c}_1(t) e^{2t} + \tilde{c}_2(t) t e^{2t}$ t.c.

$\begin{cases} \tilde{c}_1' e^{2t} + \tilde{c}_2' t e^{2t} = 0 \\ 2\tilde{c}_1' e^{2t} + \tilde{c}_2'(1 + 2t) e^{2t} = \dfrac{e^{2t}}{t+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{c}_1' = -t \tilde{c}_2' \\ \tilde{c}_2' = \dfrac{1}{t+1} \end{cases} \Rightarrow \tilde{c}_2 = \ln|t+1|$ per $t > -1$

$\Rightarrow \tilde{c}_1' = -\dfrac{t}{t+1} \Rightarrow \tilde{c}_1 = -t + \ln(t+1)$

- $x(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t - t + t\ln(t+1) + \ln(t+1))$

$\Rightarrow y(t) = x' - 2x = \dots = e^{2t}(\ln(t+1) + c_2)$ da cui $x(0) = y(0) = 0$ danno $c_1 = c_2 = 0$

Per cui $\begin{cases} x = e^{2t}(-t + t\ln(t+1) + \ln(t+1)) \\ y = e^{2t}\ln(t+1) \end{cases}$