Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
10 Luglio 2019

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Per ogni a reale si consideri

$$f_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n^a}$$

a. **(2 punti)** Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$ l'insieme di definizione di f_a.

b. **(4 punti)** Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$ l'insieme di convergenza uniforme delle serie.

c. **(2 punti)** Stabilire, giustificando la risposta, per quali valori di a risulta

$$\int_{1/2}^{1} f_a(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/2}^{1} \frac{(1-x^2)^n}{n^a} dx$$

2. **(8 punti)** Si consideri la funzione $f(x,y) = (x+y)e^{-y^2-x}$.

   a. **(3 punti)** Si determinino gli eventuali massimi e minimi locali della f nel suo dominio.

   b. **(5 punti)** si determinino i massimi e minimi assoluti della funzione f in

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leq 1\}.$$

3. **(8 punti)** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' - xy' + y = 3x^2 \\ y(1) = a \\ y'(1) = b \end{cases}$$

a. **(4 punti)** Si determini, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, la soluzione locale.

b. **(2 punti)** Si stabilisca se esistono valori di a e b per cui tale soluzione é definita su tutto $\mathbb{R}$.

c. **(2 punti)** Si discuta l'unicitá di eventuali soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

4. **(9 punti)** Si consideri l'insieme E definito da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; y > x^2, \; z > y^2, \; x > z^2\}.$$

a. **(3 punti)** Si verifichi che il volume di E é $1/7$;

b. **(4 punti)** si derminimo gli α interi e maggiori di -3 tali che esiste finito

$$\int_E x^\alpha \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z;$$

c. **(2 punti)** in $\mathbb{R}^3$ si consideri l'insieme F ottenuto ruotando l'insieme

$$E \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = 1/2\}$$

intorno all'asse z; si calcoli il volume di F.