Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PROVA SCRITTA– 18 Giugno 2019

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)**

   Siano α e β positivi. Data

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{\sqrt{6y^4+2x^4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Si stabilisca

   a. **(3 punti)** per quali valori di α e β la funzione f è continua nell'origine;

$$|x|^\alpha |y|^\beta = \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{6^\beta} \cdot \left(\sqrt[4]{2}|x|\right)^{4\cdot\frac{\alpha}{4}} \cdot \left(\sqrt[4]{6}|y|\right)^{4\cdot\frac{\beta}{4}} \leq \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{6^\beta} \cdot (2x^4+6y^4)^{\frac{\alpha+\beta}{4}} \quad \text{quindi}$$

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{(2x^4+6y^4)^{\frac{\alpha+\beta}{4}-\frac{1}{2}}}{2^\alpha 6^\beta}$$

se $\alpha+\beta>2$ f è continua

se $\alpha+\beta \leq 2$ $f(x,x) = \dfrac{|x|^{\alpha+\beta}}{\sqrt{8}\cdot|x|^2} \not\to 0$ per $x \to 0$ f non continua

   b. **(2 punti)** per quali valori di α e β f ammette tutte le derivate direzionali nell'origine;

$f(0,y) = f(x,0) = 0$ quindi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ sia quindi $v=(a,b)$ con $ab \neq 0$

$$\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t} = \frac{|a|^\alpha |b|^\beta |t|^{\alpha+\beta}}{t^3\sqrt{2a^4+6b^4}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \begin{cases} 0 & \alpha+\beta>3 \\ \nexists & \alpha+\beta \leq 3 \end{cases}$$

   c. **(3 punti)** per quali valori di α e β f è differenziabile nell'origine.

CN è che $\alpha+\beta>3$.

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{6y^4+2x^4}}$$

posto $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

risulta $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \dfrac{\rho^{\alpha+\beta}|\cos\theta|^\alpha|\sin\theta|^\beta}{\rho^3\sqrt{6\sin^4\theta+2\cos^4\theta}} \to 0$ uniformemente in θ

poiché il minimo di $6\sin^4\theta + 2\cos^4\theta$ è >0 Quindi $\alpha+\beta>3$

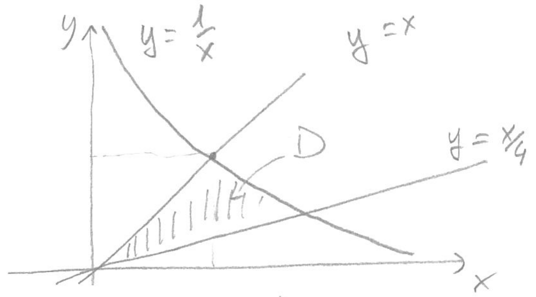
2. **(5 punti)** Sia

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x > 0;\ y > 0;\ 0 < xy < 1;\ 1 < \frac{x}{y} < 4 \right\}$$

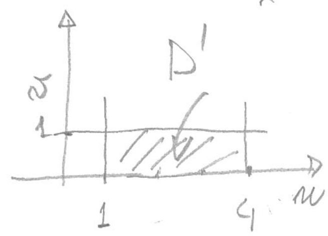
e sia $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2} \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$.

Calcolare

$$\int_D f(x,y)\,dxdy$$



posto $\begin{cases} xy = v \\ \frac{x}{y} = u \end{cases}$ e $F(u,v) = f\left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{v}{u}}\right) \left| J\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \right|$



Si ha $\displaystyle\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D'} F(u,v)\,du\,dv = \int_{D'} u^2 \operatorname{artg} u \left(\frac{1}{2u}\right) du\,dv$

$\displaystyle = \int_0^1 dv \int_1^4 \frac{u}{2} \operatorname{artg} u\,du = \frac{1}{4}\left[u^2 \operatorname{artg} u - u + \operatorname{artg} u\right]_1^4 = \frac{1}{4}\left[16 \operatorname{artg} 16 + \operatorname{artg} 4 - 3 - \pi\right]$

3. **(4 punti)** Verificare che l'equazione $e^x - 2e^y + 3x - 4y + 1 = 0$ definisce implicitamente, in un intorno del punto $(0,0)$, una funzione $y = f(x)$. Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di f, centrato in $x = 0$ e tracciare il grafico di f in un intorno di $x = 0$.

Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad F(x,y) = e^x - 2e^y + 3x - 4y + 1$

• $F(0,0) = 0$ $\quad$ • $\frac{\partial F}{\partial y} = -2e^y - 4 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -6$

$\Rightarrow \exists\, f : U_0 \to V_0$ con U_0 e V_0 intorni di zero tale che

$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U_0 \qquad f(0) = 0$

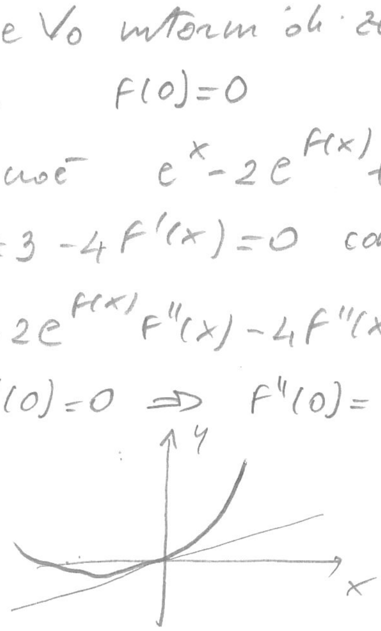
Quindi $F(x, f(x)) = 0$ $\forall x$ cioè $e^x - 2e^{f(x)} + 3x - 4f(x) = 0$

derivando rispetto a x $\quad e^x - 2e^{f(x)} f'(x) + 3 - 4f'(x) = 0$ con $x = 0 \Rightarrow 4 - 6f'(0) = 0$

$\Rightarrow f'(0) = \frac{2}{3}$

derivando rispetto a x $\quad e^x - 2e^{f(x)} (f'(x))^2 - 2e^{f(x)} f''(x) - 4f''(x) = 0$

con $x = 0$ $\quad \frac{1}{9} - 6f''(0) = 0 \Rightarrow f''(0) = \frac{1}{54}$



Polinomio $= \frac{2}{3}x + \frac{1}{108}x^2$

4. **(8 punti)** Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}}.$$

a. **(3 punti)** Si determini l'insieme di convergenza puntuale e l'insieme di convergenza uniforme della successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$;

• Fisso x: $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ per ogni x. Quindi $f_n \to 0$ puntualmente in $\mathbb{R}$

•• $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Quindi c'è convergenza uniforme a 0 in $\mathbb{R}$

essendo $f_n'(x) = -\frac{2x}{n^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{n}}$ $\quad \nearrow \;|\; \searrow$ ($x=0$) $\quad x=0$ è punto di Max per f_n

b. **(2 punti)** si determini l'insieme di convergenza puntuale e l'insieme di convergenza uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x);$$

• Se $x=0$, $f_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ termine generale serie divergente

•• Se $x\neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ termine generale serie divergente.

Per cui la serie diverge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$

c. **(3 punti)** si verifichi che si ha convergenza puntuale su $\mathbb{R}$ e convergenza uniforme su ogni compatto della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n(x).$$

<u>convergenza puntuale</u>. Fisso x e uso Leibnitz per la serie a segni alterni: vedo che

• $f_n(x) > 0$

•• $f_n(x) \overset{*}{\geq} f_{n+1}(x)$. Infatti

$g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{y}}$ (x è fissato)

$g'(y) = \left(-\frac{1}{2} y^{-3/2} + x^2 y^{-5/2}\right) e^{-\frac{x^2}{y}}$

$= \left(-\frac{1}{2} y + x^2\right) y^{-5/2} e^{-\frac{x^2}{y}}$

che per y grande è certamente negativa $\Rightarrow g$ decrescente

$\Rightarrow$ (*) vera definitivamente per $n > 2x^2$

••• $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Quindi per T. Leibnitz la Σ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione g

<u>convergenza uniforme</u>

Sia K un compatto contenuto in $[-a, a]$ con $a > 0$. Per $n > 2a^2$, $\{f_n(x)\}$ è decrescente. Quindi studiamo le "code" della serie di funzioni, ponendo $g_0 = g - \sum_{n=1}^{n_0-1} (-1)^n f_n(x)$

$\sup_{x\in K} \left| \sum_{n=n_0}^{N-1} (-1)^n f_n(x) - g_0(x) \right| \leq$ con $N_0 > 2a^2$

$\leq \sup_{x\in K} |f_N(x)| \leq f_N(0) \xrightarrow{N\to\infty} 0$

vedi punto a.

Quindi si ha convergenza uniforme su K.

5. **(8 punti)** Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{(x+1)^2} = x^2 y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ e senza risolvere l'equazione differenziali, si discuta l'esistenza e l'unicitá della soluzione locale del problema;

- Sia $F(x,y) = -\dfrac{y}{(x+1)^2} + x^2y^2$ è continua in un intorno di $(0, y_0)$

Inoltre $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + 2x^2y$ è continua in un intorno di $(0, y_0)$.

$\Rightarrow \exists !$ la soluzione locale del problema, per ogni y_0 fissato.

b. **(3 punti)** al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, si determinino tutte le soluzioni locali del problema di Cauchy assegnato;

- se $y_0 = 0$ è facile verificare che la soluzione è $y(x) = 0$
- se $y_0 \neq 0$. Poniamo $z(x) = y(x)^{1-2} \Rightarrow z'(x) = -\dfrac{1}{(y(x))^2} y'(x)$

$\Rightarrow z'(x) = \dfrac{z(x)}{(x+1)^2} + x^2 \Rightarrow z(x) = e^{\int_0^x \frac{1}{(s+1)^2} ds} \left[-\int_0^x s^2 e^{-\int_0^s \frac{1}{(v+1)^2} dv} + c \right]$

$\Rightarrow z(x) = e^{-\frac{1}{x+1}} \left[c - \int_0^x s^2 e^{\frac{1}{s+1}} ds \right] \Rightarrow y(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x+1}}}{\frac{e}{y_0} - \int_0^x s^2 e^{\frac{1}{s+1}} ds}$ $\quad *$

TENENDO CONTO DI $y(0) = y_0$

c. **(2 punti)** per quali valori di $y_0 \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$?

- se $y_0 = 0$ la soluzione $[y(x) = 0]$ è definita su tutto $\mathbb{R}$
- se $y_0 \neq 0$ la soluzione è $*$

Si osservi che $s^2 e^{\frac{1}{s+1}}$ non è integrabile in $s = -1$

quindi $\int_0^x s^2 e^{\frac{1}{s+1}} ds$ può essere definita solo in $x > -1$

e così la soluzione del problema in $*$