Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
22 Febbraio 2019

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Sia la funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

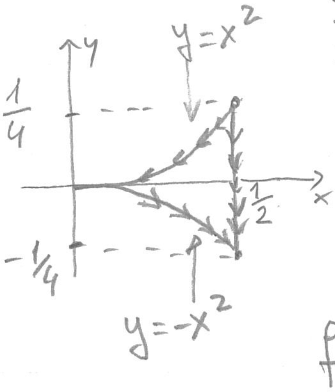
   a. **(2 punti)** Determinare se esistono estremi relativi di f nel suo dominio;

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} (x,y) = (0,0) \text{ o} \\ (1,1) \text{ o } (-1,-1) \end{matrix} \qquad H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ è sella
$(1,1)$ e $(-1,-1)$ sono minimi relativi

   b. **(3 punti)** se esistono estremi relativi di f in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le 2x \le 1, \ |y| \le x^2\};$$



I punti di max/min (che esistono per il Teorema di Weierstrass) si trovano sul bordo di D.

$f(x,-x^2) = x^8 + x^4 + 4x^3$ sempre crescente per $0 \le x \le \frac{1}{2}$

$f(x,x^2) = x^8 + x^4 - 4x^3 = g(x)$. Risulta $g'(x) = 8x^7 + 4x^3 - 12x^2$

e, per $0 \le x \le \frac{1}{2}$ si ha $g'(x) = x^2\{8x^5 + 4x - 12\} \le x^2\left[\frac{2^3}{2^5} + \frac{4}{2} - 12\right] <$

$f(\frac{1}{2}, y) = \frac{1}{16} + y^4 - 2y = h(y)$ e $h'(y) = 4y^3 - 2 < 0$ se $|y| \le \frac{1}{4}$

$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ è massimo mentre $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ è minimo

   c. **(3 punti)** si tracci una grafico qualitativo (retta tangente e concavitá) della curva di livello di f passante per il punto $(0, 1)$.

Si considera quindi l'equazione $x^4 + y^4 - 4xy - 1 = 0$ cioè $F(x,y) = 0$

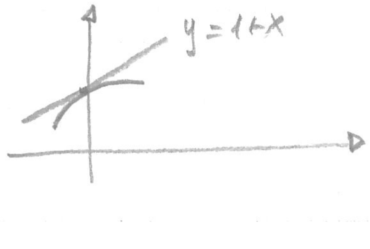
$\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 4 > 0$ quindi esiste una funzione $y = y(x)$ definita implicitamente dall'equazione $F(x,y) = 0$ Risulta $F(x, y(x)) \equiv 0$ quindi $\frac{d}{dx}(F(x,y(x))) \equiv 0$ e pure $\frac{d^2}{dx^2}F(x,y(x)) \equiv 0$

$4x^3 + 4y^3 \cdot y' - 4y - 4xy' = 0$ quindi $4y'(0) - 4 = 0$

$y'(0) = 1$

$12x^2 + 12y^2(y')^2 + 4y^3y'' - 4y' - 4y' - 4xy'' = 0$

quindi $12 + 4y''(0) - 8 = 0$ cioè $y''(0) = -1$



2. **(8 punti)** Sia

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z > x^2 + y^2, \ y > 0, \ x + y - z \geq 0\}.$$

Si stabilisca se la funzione

$$f(x,y,z) = \frac{x}{z(x^2 + y^2)}$$

è integrabile in D e, in caso affermativo, si calcoli

$$\int_D \frac{x}{z(x^2 + y^2)} \, dx \, dy \, dz.$$

Posto $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ bisogna stabilire se $F(\rho,\theta,z) = \dfrac{\cos\theta}{z}$ è integrabile

in $D' = \{(\rho,\theta,z) : \ \theta \in [0,\pi] ; \ \rho^2 < z < \rho(\cos\theta + \sin\theta)\}$ In particolare

dove essere $\rho < \cos\theta + \sin\theta$ e quindi $\cos\theta + \sin\theta > 0$ cioè $\theta \in [0, \frac{3}{4}\pi]$

Valutiamo quindi

$$A = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos\theta + \sin\theta} d\rho \int_{\rho^2}^{\rho(\cos\theta+\sin\theta)} \frac{\cos\theta}{z} \, dz \quad e \quad B = \int_{\pi/2}^{\frac{3}{4}\pi} \cos\theta \int_0^{\cos\theta + \sin\theta} d\rho \int_{\rho^2}^{\rho(\cos\theta+\sin\theta)} \frac{1}{z} \, dz$$

in quanto $\cos\theta \geq 0$ in $[0, \pi/2]$

$$\int_{\rho^2}^{\rho(\cos\theta+\sin\theta)} \frac{1}{z} = \log(\cos\theta + \sin\theta) - \log\rho$$

$$\int_0^{\cos\theta+\sin\theta} [\log(\cos\theta+\sin\theta) - \log\rho] \, d\rho = (\cos\theta+\sin\theta)\log(\cos\theta+\sin\theta) - \int_0^{\cos\theta+\sin\theta} \log\rho =$$

$$= (\cos\theta+\sin\theta)\log(\cos\theta+\sin\theta) - \Big[\rho\log\rho - \rho\Big]_0^{\cos\theta+\sin\theta} = \cos\theta + \sin\theta$$

a questo punto risulta chiaro che A e B esistono separatamente.

Valutiamo quindi $A + B = \displaystyle\int_0^{3/4\pi} \cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta = \left[\frac{\sin\theta\cos\theta + \theta}{2} + \frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{3}{8}\pi$

3. **(8 punti)** Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{x^{2n} + n^a},$$

a. **(4 punti)** si stabilisca, al variare di $a \in \mathbb{R}^+$, l'insieme E_a di convergenza semplice;

$f_n(x) = \dfrac{|x|^n}{x^{2n} + n^a}$; se $|x| = 1$ $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^a}$ e $\sum f_n$ converge per $a > 1$

Se $|x| < 1$ $f_n(x) \sim \dfrac{|x|^n}{n^a}$ quindi $\sum_1^\infty f_n(x)$ converge $\forall a$

se $|x| > 1$ $f_n(x) \sim \dfrac{|x|^n}{x^{2n}} = \dfrac{1}{|x|^n}$ e $\sum_1^\infty f_n(x)$ converge $\forall a$

b. **(4 punti)** dopo aver dimostrato che la serie converge uniformemente su $\mathbb{R}$ per $a > 2$, si stabilisca per quali valori di a la convergenza risulta uniforme su $[-1, 1]$

Quindi $E_a = \mathbb{R}$ se $a > 1$ mentre $E_a = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ se $a \leq 1$

Osservo che $f_n(x) = f_n(-x)$ e studio $f_n'(x)$ per $x > 0$

$f_n'(x) = \dfrac{n x^{n-1}[n^a - x^{2n}]}{(x^{2n} + n^a)^2}$ quindi $x_n = \pm (n^a)^{\frac{1}{2n}}$ sono punti di massimo assoluto per f_n

$f_n(x_n) = \dfrac{n^{a/2}}{2 n^a} = \dfrac{1}{2 n^{a/2}}$ e $\sum_1^{+\infty} f_n(x_n)$ converge per $a > 2$

per il ~~Criterio di Weierstrass~~ $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{2n^{a/2}}$ la serie converge uniformemente su $\mathbb{R}$ se $a > 2$

Dallo studio di $f_n'(x)$ risulta che in $[0, 1]$ $f_n'(x) > 0$ quindi

se $|x| \leq 1$ $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+n^a}$ quindi $\sum_1^\infty f_n(x)$ converge uniformemente

su $[-1, 1]$ se $a > 1$ mentre se $a \leq 1$ per il teorema del doppio limite non può esserci convergenza uniforme.

4. Si determinino le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy

a. **(2 punti)**

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \\ x_1(0) = x_2(0) = 0 \end{cases}$$

1° MODO

Si vede subito che $\begin{cases} x_1(t) = 0 \\ x_2(t) = 0 \end{cases}$ è l'unica soluzione del problema

2° MODO

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

autovalori $\lambda = \pm i$

autovettori $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$: $\beta = \frac{(1-i)\alpha}{2}$

scelgo $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} i$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \left(\cos t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + c_2 \left(\sin t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad *$$

$\xRightarrow{\text{condizioni iniziali}}$ $C_1 = C_2 = 0$

3° MODO

$x_1'' = x_1' - 2x_2' = \dots = -x_1$

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

$x_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ ✡

$x_2 = -\frac{x_1' - x_1}{2} = \dots = C_1(\cos t + \sin t) + C_2(\sin t - \cos t)$

$\xRightarrow{\text{condizioni iniziali}}$ $C_1 = C_2 = 0$

b. **(3 punti)**

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + t \\ x_2' = x_1 - x_2 \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

1° MODO

Avendo * soluzione sistema omogeneo cerco una particolare nella famiglia

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} At + B \\ Ct + D \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A = (A - 2C + 1)t + B - 2D \\ C = (A - C)t + B - D \end{cases} \dots$$

ottengo $A = C = B = 1$, $D = 0$. La soluzione generale è $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\quad\quad}_{*} + \begin{pmatrix} 1 + t \\ t \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{condizioni iniziali}} \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = t \end{cases}$

2° MODO

$x_1'' = x_1' - 2x_2' + 1 = \dots = -x_1 + t + 1$

Soluzione omogenea in ✡

Particolare la cerco $x_1 = At + B$ ⊗

$\Rightarrow 0 = (-A + 1)t + (-B + 1) \Rightarrow A = B = 1$

Soluzione generale

$x_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t + 1$

$x_2 = -\frac{x_1' - x_1 - t}{2} = \dots$

c. **(3 punti)**

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + t \\ x_2' = x_1 - x_2 + \dfrac{1}{1 + \cos t} \\ x_1(0) = -2 \log 2 \\ x_2(0) = -\log 2 \end{cases}$$

$$x_1'' = x_1' - 2x_2' + 1 = \dots = -x_1 + t + 1 - \frac{2}{1 + \cos t}$$

La soluzione dell'omogenea associata è in ✡

Una soluzione particolare per $x_1'' + x_1 = t + 1$ è in ⊗ $(x_1 = t + 1)$

Cerco soluzione particolare per $x_1'' + x_1 = -\frac{2}{1 + \cos t}$ con variazione costanti arb.

$$\begin{cases} C_1' \cos t + C_2' \sin t = 0 \\ -C_1' \sin t + C_2' \cos t = -\dfrac{2}{1 + \cos t} \end{cases} \Rightarrow C_1 = \int \frac{2 \sin t}{1 + \cos t}\, dt = -2 \ln(1 + \cos t)$$

$$C_2 = -\int \frac{2 \cos t}{1 + \cos t}\, dt = -2 \int \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t} - \underbrace{\frac{1}{1 + \cos t}}_{= \frac{1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}}}\, dt = -2t + 2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}$$

Soluzione generale

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t + 1 - 2 \cos t \ln(1 + \cos t) + \sin t \left(-2t + 2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \\ x_2 = -\dfrac{x_1' - x_1 - t}{2} = \dots = \end{cases}$$

le condizioni iniziali danno $C_1 = -1$, $C_2 = 1$, $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = -3 \cos t + \sin t + t + 3 - 2(\cos t) \ln(1 + \cos t) - 2t \sin t \\ x_2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t + t - (\cos t) \ln(1 + \cos t) - t \sin t \end{cases}$$