

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti più significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordinati o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

1. (8 punti) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^{nx} + (x-n)^2}$$

a. (2 punti) Si studi la convergenza puntuale della successione.

se  $x < 0$   $f_n(x) \rightarrow 0$

$f_n(0) \rightarrow 0$

se  $x > 0$   $f_n(x) \sim \frac{e^{nx}}{e^{mx}} \rightarrow 1$

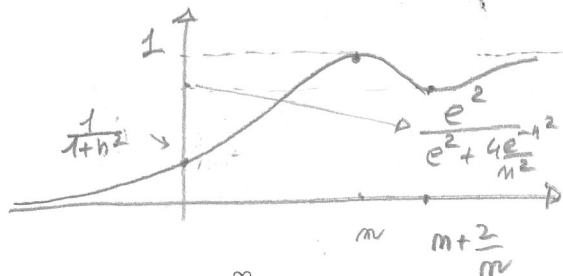
la funzione limite  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

b. (4 punti) Si determinino gli insiemi  $E \subset \mathbb{R}$  in cui la convergenza è uniforme.

Siccome  $f$  è discontinua non c'è conv. uniforme su  $\mathbb{R}$  né in qualunque insieme che contiene un intorno completo di 0.

$$f'_m(x) = \frac{(x-n)e^{mx} [m(x-m) - 2]}{(e^{mx} + (x-n)^2)^2}$$

$f'_m(x) > 0 \Leftrightarrow x < n$  oppure  $x > n + \frac{2}{m}$



in ogni sottoinsieme di  $(-\infty, 0]$  si ha convergenza uniforme

per  $x \geq a$   $\sup |f_n(x) - 1| = \max\left(\frac{4}{n^2 e^{n^2+4}}, f(a)\right)$

quindi si ha convergenza uniforme in  $[a, +\infty)$

c. (2 punti) Si studi la convergenza uniforme in  $(-\infty, 0]$  della serie di funzioni  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ .

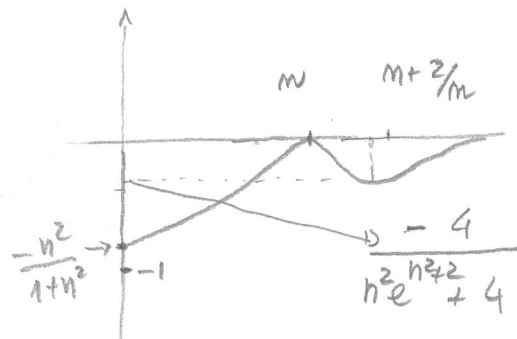
punto c:

per quanto detto nel punto b

$f_n(x) \leq \frac{1}{1+n^2}$  se  $x \leq 0$  quindi

per Weierstrass la serie converge uniformemente in  $(-\infty, 0]$

$f'_m(x) - 1$  per  $x > 0$



2. (8 punti) Si consideri la funzione  $f(x, y) = (xy - x^2)e^{-x-y}$ .

a. (3 punti) Si determinino gli eventuali massimi e minimi sia locali e che globali della  $f$  nel suo dominio.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 e^{-x} = -\infty \Rightarrow \text{Inf } F = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-3x} = +\infty \Rightarrow \text{Sup } F = +\infty$   
 $\nabla f(x, y) = e^{-x-y} (x^2 - xy - 2x + y, x^2 - xy + x) \Rightarrow \nabla f(x, y) = (0, 0) \rightarrow A = (0, 0)$   
 $\text{Hess } f(x, y) = -e^{-x-y} \begin{bmatrix} x^2 - xy - 4x + 2y + 2 & x^2 - xy + 2x \\ x^2 - xy - x + y - 1 & x^2 - xy + 2x \end{bmatrix}$   
 $\text{Hess } f(0, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  non definite  
 $\text{Hess } f(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{e^{-2}}{2} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  definite negative

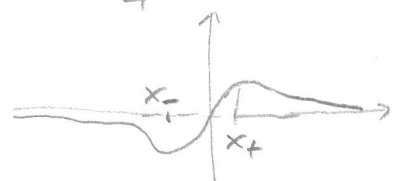
A pto selle  
 B pto massimo locale

b. (3 punti) Si determinino gli eventuali massimi e minimi sia locali e che globali della  $f$  in

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + x - y = 0\}.$$

$y = 2x^2 + x \Rightarrow g(x) = f(x, 2x^2 + x) = 2x^3 e^{-2x^2 - 2x}$   
 $g'(x) = -2x^2 e^{-2x^2 - 2x} (4x^2 + 2x - 3)$   
 $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x_- = \frac{-1 - \sqrt{13}}{4} < x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{4} = x_+$

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$



$x_+$  Max assoluto per  $g$   
 $x_-$  Min assoluto per  $g$

$\Rightarrow (x_+, 2x_+^2 + x_+)$  Max assoluto per  $f$  in  $C$   
 $(x_-, 2x_-^2 + x_-)$  Min assoluto per  $f$  in  $C$

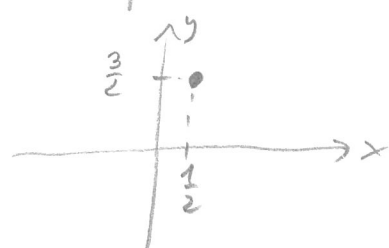
c. (2 punti) Si fornisca una rappresentazione locale della curva di livello della funzione  $f$  passante per il punto  $(1/2, 3/2)$ .

Il punto  $B = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  è massimo relativo per  $f$

Quindi in un intorno  $U_B$  del punto  $B$  si ha

$$f(x, y) > f(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \quad \forall (x, y) \in U_B \quad e$$

$\{(x, y) \in U_B : f(x, y) = f(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\} = \{(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\}$  cioè le curve di livello è costituite da un solo punto (localmente)



3. (8 punti) Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{t}y + 4t^2\sqrt{y} \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

a. (2 punti) Al variare di  $y_0 \in \mathbb{R}$  si discuta l'esistenza e l'unicità della soluzione locale del problema di Cauchy.

- Ovviamente deve essere  $y_0 \geq 0$  altrimenti  $\sqrt{y}$  non ha senso.
- se  $y_0 > 0$ , la soluzione  $\exists!$  locale essendo  $f(t, y) = \frac{2}{t}y + 4t^2\sqrt{y}$  localmente lipschitziana rispetto a  $y$ , in un intorno di  $(1, y_0)$
- se  $y_0 = 0$  non possiamo garantire l'esistenza e l'unicità.

b. (3 punti) Per i valori di  $y_0$  per cui esiste unica la soluzione locale, la si determini. Tali soluzioni possono essere estese a tutto  $\mathbb{R}$ ?

Se  $y_0 > 0$ . Poniamo  $z = y^{1/2} \Rightarrow z' = \frac{1}{2} \frac{y'}{\sqrt{y}} \Rightarrow z' = \frac{z}{t} + 2t^2$

$$\Rightarrow z(t) = e^{\int \frac{1}{t} dt} \left[ \int 2t^2 e^{-\int \frac{1}{t} dt} dt + k \right] = t^3 + kt \quad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{y(t)} = t^3 + kt \quad \text{che è vera per } t > 0 \text{ per cui } t^3 + kt > 0$$

e  $y(1) = y_0$  implica  $k = \sqrt{y_0} - 1 \Rightarrow y(t) = (t^3 + (\sqrt{y_0} - 1)t)^2$  per  $\begin{cases} t > 0 \\ t^2 \geq 1 - \sqrt{y_0} \end{cases}$

\* se  $y_0 \geq 1$ , la  $\bullet$  ha senso in  $[0, \infty)$  ed essendo  $y(0) = 0$  e  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(h) - y(0)}{h} = 0$  posso "attaccarla"  $C^1$  in  $t=0$  alla soluzione nulla.

\*\* se  $y_0 < 1$ , la  $\bullet$  ha senso in  $[\bar{t}, \infty)$  con  $\bar{t} = \sqrt{1 - \sqrt{y_0}}$ . Essendo  $y(\bar{t}) = 0$  e  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(\bar{t}+h) - y(\bar{t})}{h} = 0$  posso "attaccarla"  $C^1$  alla soluzione nulla.

c. (3 punti) Per i valori di  $y_0$  per cui esiste più di una soluzione locale, le si determinino tutte.

o. Se  $y_0 = 0$ .

La funzione  $y(t) \equiv 0$  è una soluzione.

$\forall (t_0, \tilde{y}_0) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ , la soluzione del problema  $\begin{cases} y' = \frac{2}{t}y + 4t^2\sqrt{y} \\ y(t_0) = \tilde{y}_0 \end{cases}$

è tale che  $\sqrt{y} = t^3 + kt$  con  $k$  tale che  $\sqrt{\tilde{y}_0} = t_0^3 + kt_0$  e

definite per  $t > 0$  per cui  $t^3 + kt > 0$ . Quindi  $k = \frac{\sqrt{\tilde{y}_0} - t_0^3}{t_0}$  ed

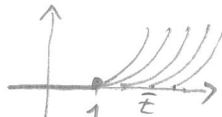
essendo  $t_0 > 0$  i  $t$  devono essere tali che  $t^2 + \frac{\sqrt{\tilde{y}_0} - t_0^3}{t_0} > 0$

Se  $\bar{t} = \sqrt{\frac{t_0^3 - \sqrt{\tilde{y}_0}}{t_0}} \geq 1$ . In modo simile e prima

$$y(t) = \begin{cases} \left( t^3 + \frac{\sqrt{\tilde{y}_0} - t_0^3}{t_0} t \right)^2 & \text{in } t \geq \bar{t} \\ 0 & \text{in } t < \bar{t} \end{cases} \quad \text{è } C^1 \text{ e soluzione}$$

Queste soluzioni, scegliendo  $\bar{t} \geq 1$ , sono

tutte le altre soluzioni locali del problema (oltre alle) nulla



4. (8 punti) Al variare del parametro reale  $\alpha \in \mathbb{R}$  si consideri la funzione

$$f(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}$$

nel suo dominio. Si consideri l'insieme  $E$  definito da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}.$$

a. (4 punti) Si stabilisca per quali  $\alpha$  la funzione  $f$  é integrabile su  $E$ ;

operiamo il cambio di coordinate  $x = \rho \sin \psi \cos \theta$ ;  $y = \rho \sin \psi \sin \theta$ ;  $z = \rho \cos \psi$   
 dove  $\rho > 0$ ;  $0 \leq \psi \leq \pi$ ;  $0 \leq \theta < 2\pi$ . In coordinate sferiche a  $E$  corrisponde

$$E' = \{0 \leq \theta < 2\pi; \sin \psi \leq \rho \leq \cos \psi; 0 \leq \psi \leq \pi/4\}. \text{ Quindi si analizza}$$

$$\int_{E'} \frac{\rho^3 \sin^2 \psi |\cos \theta|}{\rho^{2\alpha}} = 4 \int_0^{\pi/4} d\psi \sin^2 \psi \int_{\sin \psi}^{\cos \psi} \rho^{3-2\alpha} d\rho = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 \psi ([\cos \psi]^{4-2\alpha} - [\sin \psi]^{4-2\alpha})}{4-2\alpha} d\psi \quad \alpha \neq 2$$

$$\alpha = 2 : 4 \int_0^{\pi/4} \sin^2 \psi [\log \cos \psi - \log \sin \psi] d\psi$$

b. (2 punti) al variare di  $\alpha$ , quando é possibile, si calcoli

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz;$$

affinità  $\alpha$  deve essere  $5-2\alpha > -1$  quindi  $\alpha < \frac{7}{2}$  ( $\alpha = 2$  non dà problemi  
 poiché  $\sin^2 \psi \log \sin \psi$  é integrabile in un intorno destro di 0.

$$\int_E f(x, y, z) = 0 \text{ quando esiste poiché } \int_0^{2\pi} \cos \theta = 0 \left( \int_0^{2\pi} |\cos \theta| = 4 \right)$$

c. (2 punti) si calcoli il volume dell'insieme  $E$ .

$$\begin{aligned} \text{Vol } E &= 2\pi \int_{E'} \rho^2 \sin \psi d\rho d\psi = 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin \psi d\psi \int_{\sin \psi}^{\cos \psi} \rho^2 d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin \psi \frac{\cos^3 \psi}{3} - \frac{\sin^3 \psi}{3} = 2\pi \left[ \frac{-\cos^4 \psi}{12} \right]_0^{\pi/4} - \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi/4} \sin^4 \psi = \frac{14\pi - 3\pi^2}{48} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^4 \psi &= \int \sin^2 \psi - \int (\sin \psi \cos \psi)^2 = \\ &= \frac{\psi - \sin \psi \cos \psi}{2} - \frac{1}{8} \left( \frac{2\psi - \sin 2\psi \cos 2\psi}{2} \right) \end{aligned}$$