Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
24 Settembre 2019

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^{nx} + (x-n)^2}.$$

a. **(2 punti)** Si studi la convergenza puntuale della successione.

b. **(4 punti)** Si determinino gli insiemi $E \subset \mathbb{R}$ in cui la convergenza é uniformemente.

c. **(2 punti)** Si studi la convergenza uniforme in $(-\infty, 0]$ della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

2. **(8 punti)** Si consideri la funzione $f(x, y) = (xy - x^2)e^{-x-y}$.

a. **(3 punti)** Si determinino gli eventuali massimi e minimi sia locali e che globali della f nel suo dominio.

b. **(3 punti)** Si determinino gli eventuali massimi e minimi sia locali e che globali della f in

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 2x^2 + x - y = 0\}.$$

c. **(2 punti)** Si fornisca una rappresentazione locale della curva di livello della funzione f passante per il punto $(1/2, 3/2)$.

3. **(8 punti)** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2}{t}y + 4t^2\sqrt{y} \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ si discuta l'esistenza e l'unicitá della soluzione locale del problema di Cauchy.

b. **(3 punti)** Per i valori di y_0 per cui esiste unica la soluzione locale, la si determini. Tali soluzioni posso essere estese a tutto $\mathbb{R}$?

c. **(3 punti)** Per i valori di y_0 per cui esiste piú di una soluzione locale, le si determinino tutte.

4. **(8 punti)** Al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}$$

nel suo dominio. Si consideri l'insieme E definito da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}.$$

a. **(4 punti)** Si stabilisca per quali α la funzione f é integrabile su E;

b. **(2 punti)** al variare di α, quando é possibile, si calcoli

$$\int_E f(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z;$$

c. **(2 punti)** si calcoli il volume dell'insieme E.