Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PROVA SCRITTA– 18 Giugno 2018

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

1. **(8 punti)**
   Data la successione di funzioni
$$f_{n,a}(x) = n^a x(1-x^2)^n$$

   a. **(5 punti)** Si determini, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'insieme E_a di convergenza semplice.

$\forall a \quad f_{n,a}(0) = f_{n,a}(-1) = f_{n,a}(1) = 0$;

$a>0 \quad f_{n,a}(x)$ converge $\iff |1-x^2|<1 \iff -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$; $\lim_{n\to+\infty} f_{n,a}(x) = 0$

$a<0 \quad f_{n,a}(x)$ converge $\iff |1-x^2|\le 1 \iff -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$; $\lim_{n\to+\infty} f_{n,a}(x) = 0$

$a=0 \quad f_{n,0}(x)$ converge $\iff x \in (-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$ $\lim_{n\to+\infty} f_{n,0}(x) = 0$

   b. **(3 punti)** Stabilire per quali valori di a la convergenza su E_a è anche uniforme.

$f'_{n,a}(x) = n^a (1-x^2)^{n-1}\left[1 - x^2(2n+1)\right]$; $f'_{n,a}(x)=0 \iff x = \pm 1$; $x^2 = \frac{1}{2n+1}$

$|f'_{n,a}(1/\sqrt{2n+1})| = |f_{n,a}(-1/\sqrt{2n+1})| = \frac{n^a}{\sqrt{2n+1}}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n < n^a\sqrt{2} = |f_{n,a}(\sqrt{2})|$

Quindi $\sup_{|x|<\sqrt{2}} |f_{n,a}(x)| = n^a\sqrt{2} \to \iff a<0$

Inoltre, siccome per $a \geq 0$ $f_{n,a}(\pm\sqrt{2})$ NON converge, per il Teorema del doppio limite la convergenza non è uniforme su $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$

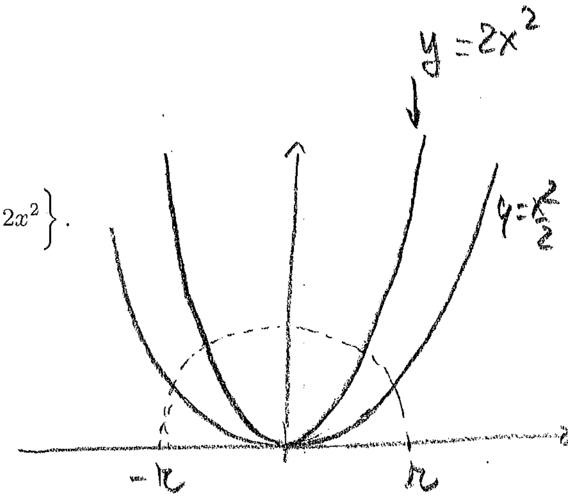
2. **(8 punti)** Sia α intero e positivo; sia $r > 1$ e sia

$$D_r = \left\{(x,y)\ : x^2+y^2 \le r;\ \frac{x^2}{2} \le y \le 2x^2\right\}.$$

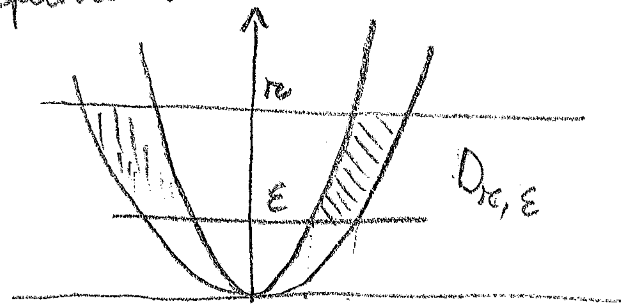
a. **(4 punti)** si determinino gli α per cui esiste finito

$$\int_{D_r} \frac{x}{(y+x^2)^\alpha}\,dx\,dy$$

e lo si calcoli.



L'unico problema è in $(0,0)$: siccome $\frac{|x|}{(y+x^2)^\alpha} \ge 0$ posso passare al limite usando questo dominio:



$$\int_{D_{r,\varepsilon}} |f(x,y)| = 2\int_\varepsilon^r dy \int_{\sqrt{y/2}}^{\sqrt{2y}} \frac{x\,dx}{(y+x^2)^\alpha} = \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha \ne 1 \end{cases}$$

per $\alpha=1$ $= \int_\varepsilon^r \left[\lg 3y - \lg \frac{3}{2}y\right] = (r-\varepsilon)\log 2$

per $\alpha \ne 1$ $= \frac{1}{1-\alpha}\int_\varepsilon^r (3y)^{1-\alpha} - \left(\frac{3}{2}y\right)^{1-\alpha} dy < +\infty \iff \alpha < 2$

b. **(4 punti)** Si stabilisca per quali α si ha

$$\lim_{r\to\infty} \int_{D_r} \frac{x}{(y+x^2)^\alpha}\,dx\,dy = \int_D \frac{x}{(y+x^2)^\alpha}\,dx\,dy$$

ove $D = \left\{(x,y)\ : \frac{x^2}{2} \le y \le 2x^2\right\}$.

$\int_{D_r} \frac{x\,dxdy}{(y+x^2)^\alpha} = 0 \quad \forall\ \alpha \le 1$ in quanto $f(-x,y) = f(x,y)$ e D_r è simmetri-
co rispetto all'asse y.

Studiamo l'esistenza di $\int_D \frac{|x|\,dxdy}{(y+x^2)^\alpha}$. Come prima considero $D_{r,\varepsilon}$ e considero $\lim_{r\to+\infty} \int_{D_{r,\varepsilon}} |f(x,y)|dxdy$. Dai conti di prima:

per $\alpha=1$ $\int_{D_{r,\varepsilon}} |f(x,y)| = (r-\varepsilon)\lg 2$

per $\alpha \ne 1$ $\int_{D_{r,\varepsilon}} |f(x,y)| = \frac{1}{1-\alpha}\int_\varepsilon^r y^{1-\alpha}\left(3^{1-\alpha} - \left(\frac{3}{2}\right)^{1-\alpha}\right) dy$

Quindi $\lim_{r\to+\infty}\int_{D_{r,\varepsilon}} |f(x,y)| < +\infty \iff \alpha > 2$ e l'uguaglianza del punto b NON È MAI VERA!

3. **(8 punti)** Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x, y, z) = z^2 - xy - 1.$$

a. **(5 punti)** Si determinino i punti della superficie $F(x, y, z) = 0$ piú vicini all'origine.

• Il problema è equivalente a

$$\begin{cases} \text{Min } x^2+y^2+z^2 = g(x,y,z) \\ z^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$$

•• Introduciamo la Lagrangiana

$$L = x^2+y^2+z^2+\lambda(z^2-xy-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - \lambda y = 0 \\ 2y - \lambda x = 0 \\ 2z + 2\lambda z = 0 \\ z^2 - xy - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

da cui $\lambda = -2 \quad (x,y,z) = (\pm 1, \mp 1, 0)$
$\lambda = -1 \quad (x,y,z) = (0, 0, \pm 1)$ $\Big\}$ punti estremali

••• Poiché $g(\pm 1, \mp 1, 0) = 2$
e $g(0,0,\pm 1) = 1$
I punti $(0,0,\pm 1)$ sono i veri candidati ad essere Min

•••• L'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$ è chiuso. Visto il problema certamente il Min (per Weierstrass) esiste in $E \cap B_{\mathbb{R}^3}(0, 100)$.
Quindi $(0,0,\pm 1)$ sono Min

b. **(3 punti)** Si stabilisca se $F(x, y, z) = -2e^z$ in un intorno del punto $(1, 1, 0)$ definisce una superficie di equazione $z = g(x, y)$; in caso affermativo si scriva l'equazione del piano tangente alla superficie in $(1, 1, 0)$.

• $F(x,y,z) = -2e^z$ Sia

$$G(x,y,z) = z^2 - xy - 1 + 2e^z$$

$$G(1,1,0) = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 2z + 2e^z = 2$$

in $(1,1,0)$

Esiste $g : U_{(1,1)} \to V_0$, $g(1,1) = 0$
$U_{(1,1)} \subset \mathbb{R}^2$ intorno di $(1,1)$
$V_0 \subset \mathbb{R}$ intorno di 0

•• $G(x,y,g(x,y)) = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2g\frac{\partial g}{\partial x} - y + 2\frac{\partial g}{\partial x}e^g = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 2g\frac{\partial g}{\partial y} - x + 2\frac{\partial g}{\partial y}e^g = 0$$

per $(x,y) = (1,1)$ si ottiene

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2}$$

$z = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$ è l'equazione del piano tangente

4. **(8 punti)**

a. **(3 punti)** Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 0, \qquad x > 0.$$

• Equazione di Eulero; poniamo

$z(t) = y(e^t)$

$\Rightarrow z'' + 3z' + 2z = 0$

$\Rightarrow z(t) = a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t}$

$\Rightarrow y(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2}$ per $x > 0$ con a_1, a_2 costanti qualsiasi

b. **(5 punti)** Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' + 4xy' + 2y = \cos x \\ y(\pi/2) = y'(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

• $y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}$

cerchiamo una soluzione particolare $\tilde{y}$ con il metodo di variazione costanti

$$\begin{cases} c_1' \frac{1}{x} + c_2' \frac{1}{x^2} = 0 \\ -c_1' \frac{1}{x^2} - 2c_2' \frac{1}{x^3} = \frac{\cos x}{x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1' = -c_2' \frac{1}{x} \\ c_2' = -x\cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \sin x \\ c_2 = -x\sin x - \cos x \end{cases}$$

Soluzione particolare

$$\tilde{y} = \frac{\sin x}{x} + \frac{-x\sin - \cos x}{x^2} = -\frac{\cos x}{x^2}$$

•• Soluzione generale

$$y = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2} \qquad x > 0$$

$y(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{\pi}{2}a_1$

$$y'(x) = -\frac{a_1}{x^2} - \frac{2a_2}{x^3} + \frac{x\sin x + 2\cos x}{x^3}$$

$$y'(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow -\frac{4a_1}{\pi^2} - 2\frac{a_2 8}{\pi^3} + \frac{4}{\pi^2} = 0$$

$\Rightarrow a_1 = -1$

$a_2 = \frac{\pi}{2}$

Soluzione

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2x^2} - \frac{\cos x}{x^2}$$