Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PROVA SCRITTA– 18 Giugno 2018

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)**
   Data la successione di funzioni
   $$f_{n,a}(x) = n^a x(1-x^2)^n$$
   a. **(5 punti)** Si determini, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'insieme E_a di convergenza semplice.

   b. **(3 punti)** Stabilire per quali valori di a la convergenza su E_a è anche uniforme.

2. **(8 punti)** Sia α intero e positivo; sia $r > 1$ e sia

$$D_r = \left\{ (x, y) \ : x^2 + y^2 \leq r; \ \frac{x^2}{2} \leq y \leq 2x^2 \right\}.$$

a. **(4 punti)** si determinino gli α per cui esiste finito

$$\int_{D_r} \frac{x}{(y + x^2)^\alpha} dx\, dy$$

e lo si calcoli.

b. **(4 punti)** Si stabilisca per quali α si ha

$$\lim_{r \to \infty} \int_{D_r} \frac{x}{(y + x^2)^\alpha} dx\, dy = \int_{D} \frac{x}{(y + x^2)^\alpha} dx\, dy$$

ove $D = \left\{ (x, y) \ : \frac{x^2}{2} \leq y \leq 2x^2 \right\}$.

3. **(8 punti)** Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x, y, z) = z^2 - xy - 1.$$

a. **(5 punti)** Si determinino i punti della superficie $F(x, y, z) = 0$ piú vicini all'origine.

b. **(3 punti)** Si stabilisca se $F(x, y, z) = -2e^z$ in un intorno del punto $(1, 1, 0)$ definisce una superficie di equazione $z = g(x, y)$; in caso affermativo si scriva l'equazione del piano tangente alla superficie in $(1, 1, 0)$.

4. **(8 punti)**

a. **(3 punti)** Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 0, \qquad x > 0.$$

b. **(5 punti)** Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' + 4xy' + 2y = \cos x \\ y(\pi/2) = y'(\pi/2) = 0 \end{cases}$$