**Analisi Matematica II** per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PROVA SCRITTA– 22 Febbraio 2018

---

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

---

NOME E COGNOME:

---

1. **(9 punti)**
   Data la successione di funzioni
   $$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x\sqrt{n}}}{1+x^{2n}}$$

   *a.* **(5 punti)** Si determini l'insieme $E$ di convergenza semplice.

   *b.* **(2 punti)** Si stabilisca se sull'insieme $E$ si ha convergenza uniforme.

   *c.* **(2 punti)** Si calcoli
   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} f_n(x)dx$$

2. **(8 punti)** Sia

$$D = \{(x, y, z) \ : 0 < z < x^2 + y^2 < x \}$$

e sia

$$f(x, y, z) = \frac{y}{x\sqrt{z}} \ .$$

*a.* **(6 punti)** Dimostrare che $f$ è integrabile su $D$.

*b.* **(2 punti)** Calcolare $\displaystyle\int_D f(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$.

3. **(8 punti)** Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq y \leq 2 - x^2 - y^2\}$.

   *a.* **(5 punti)** Nell'insieme $D$, si determinino eventuali massimi e minimi assoluti della funzione
   $$f(x, y) = |y - 1|(2 - y - x^2).$$

   *b.* **(3 punti)** Nell'insieme $D$, si determinino eventuali massimi e minimi assoluti della funzione
   $$g(x, y) = x - y^{20}.$$

4. **(8 punti)**

*a.* **(3 punti)** Si determinino tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + t \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}$$

*b.* Si consideri il seguente problema di Cauchy del primo ordine vettoriale

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + t \\ x_2' = x_1 - x_2 + \dfrac{1}{\cos t} \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

*b1.* **(1 punti)** Si scriva un problema di Cauchy del secondo ordine equivalente a (1):

*b2.* **(4 punti)** Si determini la soluzione del problema di Cauchy (1) nell'intervallo piú ampio possibile.