Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PROVA SCRITTA– 22 Febbraio 2018

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(9 punti)**

   Data la successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x\sqrt{n}}}{1+x^{2n}}$$

   a. **(5 punti)** Si determini l'insieme E di convergenza semplice.

Sia $x>0$ $\quad f_n(x) = \dfrac{e^{n\log x - x\sqrt{n}}}{1+x^{2n}} \simeq \begin{cases} e^{n\log x - x\sqrt{n}} & \text{se } 0<x\leq 1 \\ \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{x^n} & \text{se } x>1 \end{cases}$

quindi $f_n(x) \to 0 \quad \forall\, x \geq 0$

Sia $x<0$ $\quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{n\log|x|}\, e^{-x\sqrt{n}}}{1+x^{2n}} \simeq \begin{cases} (-1)^n e^{n\log|x| - x\sqrt{n}} & \text{se } -1<x<0 \\ (-1)^n \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{|x|^n} & \text{se } x<-1 \end{cases}$

$f_n(-1) = \dfrac{(-1)^n}{2} e^{\sqrt{n}}$. Quindi $E = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

   b. **(2 punti)** Si stabilisca se sull'insieme E si ha convergenza uniforme.

No perché se lo fosse $f_n(-1)$ dovrebbe essere di Cauchy (Teorema del doppio limite)

   c. **(2 punti)** Si calcoli
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} f_n(x)dx$$

$0 \leq f_n(x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ se $0 \leq x \leq 1/2$ quindi

$$0 \leq \int_0^{1/2} f_n(x) \leq \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n+1}} \to 0$$

2. **(8 punti)** Sia
$$D = \{(x, y, z) \ : 0 < z < x^2 + y^2 < x\}$$
e sia
$$f(x, y, z) = \frac{y}{x\sqrt{z}}\,.$$

a. **(6 punti)** Dimostrare che f è integrabile su D.

$D = D^+ \cup D^-$ dove $D^+ = \{(x,y,z): 0<z<x^2+y^2<x \,;\, y \geq 0\}$

$D^- = \{(x,y,z): 0<z<x^2+y^2<x \,;\, y<0\}$

Su D^+ e su D^- f ha segno costante

Poniamo $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $D^+_{\rho,\theta,z} = \{(\theta,\rho,z): 0<z<\rho^2;\ 0\leq\rho\leq\cos\theta;\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\}$ è il corrispondente di D^+

Bisogna quindi valutare

$$\int_{D^+_{\rho,\theta,z}} \frac{\rho\sin\theta}{\cos\theta\sqrt{z}} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos\theta} \rho\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\rho \int_0^{\rho^2} \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta \int_0^{\cos\theta} 2\rho^2\,d\rho =$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos^2\theta < +\infty$$

b. **(2 punti)** Calcolare $\int_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$.

Un conto del tutto analogo mostra che $\int_{D^-} f$ è convergente.

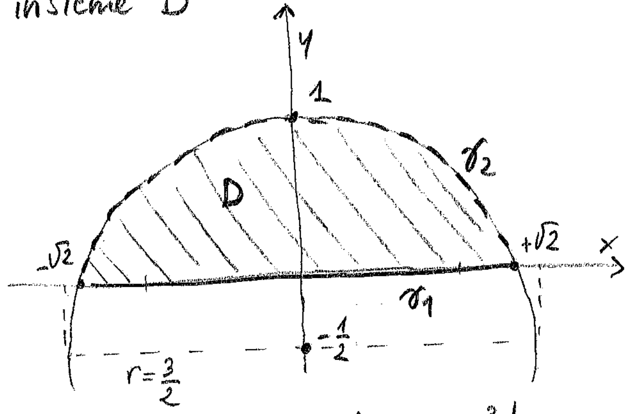
Poiché D^+ e D^- hanno la stessa misura e $f(x,y,z) = -f(x,-y,z)$ l'integrale del punto b) vale 0.

3. **(8 punti)** Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le y \le 2 - x^2 - y^2\}$.

a. **(5 punti)** Nell'insieme D, si determinino eventuali massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = |y-1|(2-y-x^2).$$

• L'insieme D



•• In D, $f(x,y) = (1-y)(2-y-x^2)$

$\nabla f(x,y) = (-2x(1-y), 2y+x^2-3)$

$\nabla f(x,y) \neq (0,0)\ \forall (x,y) \in D$

Max e Min assoluti esistono per Teorema di Weierstrass e saranno su $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$

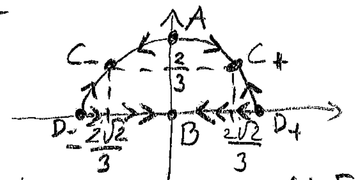
••• $\gamma_1 = \{(x,0) : |x| \le \sqrt{2}\}$

$f(x,y) \overset{\text{in } \gamma_1}{=} g(x) = 2 - x^2 \Rightarrow g'(x) > 0$ in $x<0$

$\gamma_2 = \{(x,y) : x^2+y^2+y-2=0,\ y \ge 0\}$

$f(x,y) \overset{\text{in } \gamma_2}{=} (1-y)y^2 = h(y) \Rightarrow h'(y) > 0$ in $0<y<\frac{2}{3}$

cioè



$D_\pm = (\pm\sqrt{2}, 0)$

$C_\pm = \left(\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3}\right)$

I punti $A=(0,1)$, $D_\pm = (\pm\sqrt{2},0)$ sono tutti MINIMI ASSOLUTI perché f è nulla su tutti e 3.

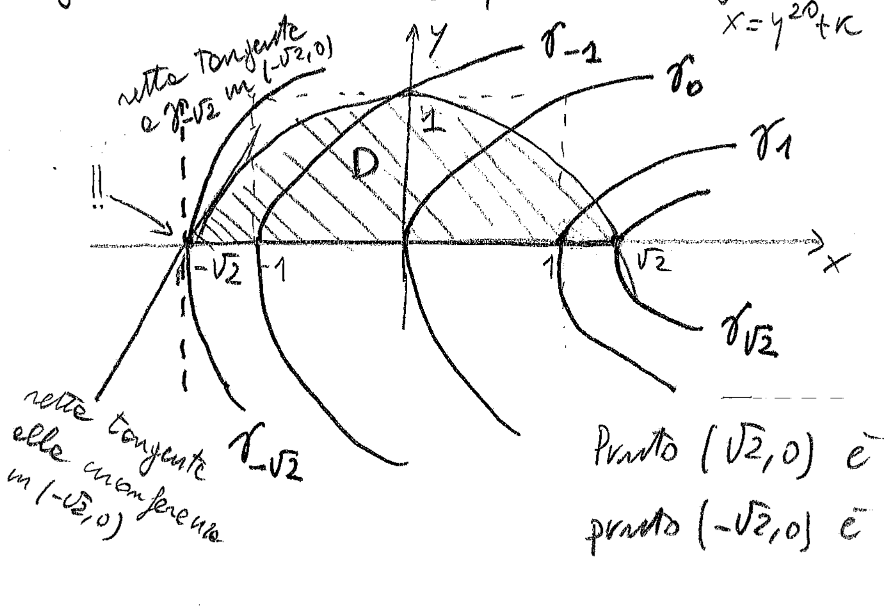
Il massimo assoluto è B perché $f(0,0) > f\left(\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3}\right)$

b. **(3 punti)** Nell'insieme D, si determinino eventuali massimi e minimi assoluti della funzione

$$g(x,y) = x - y^{20}.$$

Per ogni $K \in \mathbb{R}$ sia $\gamma_K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = K\}$

$x = y^{20} + K$



Punto $(\sqrt{2},0)$ è Max

punto $(-\sqrt{2},0)$ è Min

4. **(8 punti)**

a. **(3 punti)** Si determinino tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + t \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}$$

I° MODO

• $x_1'' = x_1' - 2x_2' + 1 = x_1' - 2(x_1 - x_2) + 1$

$= x_1' - 2x_1 + 2\left(\frac{x_1 + t - x_1'}{2}\right) + 1$

con $x_1 = x \Rightarrow x'' + x = t + 1$

•• Soluzione omogenea $x = a\cos t + b\sin t$

soluzione particolare $x = t + 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a\cos t + b\sin t + t + 1 \\ x_2 = \frac{x_1 + t - x_1'}{2} = \frac{a}{2}(\cos t + \sin t) + \frac{b}{2}(\sin t - \cos t) + t \end{cases}$$

II° MODO (LUNGO!!) $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$

• Soluzione omogenea: $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda_\pm = \pm i$;

un autovettore di $\lambda_+ = i$ è $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin t\right] + B\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\cos t\right]$

•• Soluzione particolare della forma $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ct + D \\ Et + F \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E = C = D = 1$, $F = 0$

••• Soluzione generale

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A\cos t + 2B\sin t \\ A(\cos t + \sin t) + B(\sin t - \cos t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t + 1 \\ t \end{pmatrix}$

b. Si consideri il seguente problema di Cauchy del primo ordine vettoriale

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + t \\ x_2' = x_1 - x_2 + \dfrac{1}{\cos t} \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

b1. **(1 punti)** Si scriva un problema di Cauchy del secondo ordine equivalente a (1):

$x_1'' = x_1' - 2x_2' + 1 = \dots$

$= -x_1 + t + 1 - \frac{2}{\cos t}$

$x = x_1$ $\quad x(0) = x_1(0) = 0$

$x' = x_1'$ $\quad x'(0) = x_1(0) - 2x_2(0) + 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' + x = t + 1 - \frac{2}{\cos t} \\ x'(0) = x(0) = 0 \end{cases}$$

b2. **(3 punti)** Si determini la soluzione del problema di Cauchy (1) nell'intervallo piú ampio possibile.

• Per il principio di sovrapposizione, la soluzione generale di $x'' + x = t + 1 - \frac{2}{\cos t}$ la ottengo aggiungendo alla soluzione generale di $x'' + x = t + 1$ (trovata nel I° modo del punto a.) una soluzione particolare di $x'' + x = t + 1 - \frac{2}{\cos t}$. Questa soluzione particolare la trovo con il metodo di variazione delle costanti: $\begin{cases} c_1'\cos t + c_2'\sin t = 0 \\ -c_1'\sin t + c_2'\cos t = -\frac{2}{\cos t} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_2' = -2 \\ c_1' = 2\frac{\sin t}{\cos t} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_2 = -2t \\ c_1 = -2\log|\cos t| \end{matrix}$

soluzione è $x = a\cos t + b\sin t + t + 1 - 2(\log|\cos t|)\cos t - 2t\sin t$: Ha senso per $|t| < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a\cos t + b\sin t + t + 1 - 2(\log(\cos t))\cos t - 2t\sin t \\ x_2 = -\frac{a}{2}\cos t + \frac{b}{2}\sin t - (\log(\cos t))\sin t + t\cos t + \frac{a}{2}\sin t + \frac{b}{2}\cos t + t - t\sin t - (\log(\cos t))\cos t \end{cases}$$

$x_1(0) = x_2(0) = 0 \Rightarrow a = b = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\cos t - \sin t(1 + 2t) + t + 1 - 2(\log(\cos t))\cos t \\ x_2 = -(\sin t + \cos t)\log(\cos t) + t\cos t + t - t\sin t - \sin t \end{cases}$

per $|t| < \frac{\pi}{2}$