Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PROVA SCRITTA– 24 Settembre 2018

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

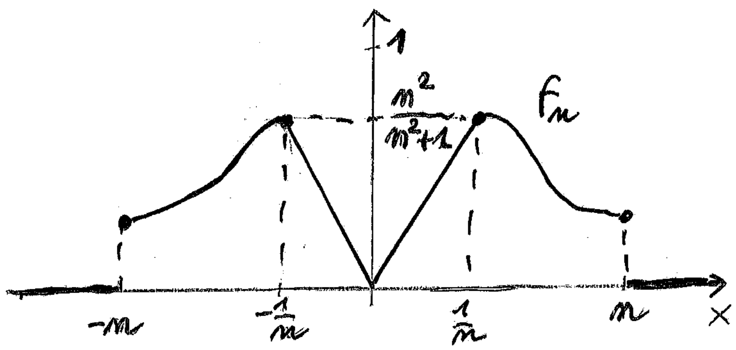
NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n^3|x|}{1+n^2} & \text{se } |x| \le \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{1+x^2} & \text{se } \frac{1}{n} < |x| \le n \\ 0 & \text{se } |x| > n \end{cases}$$

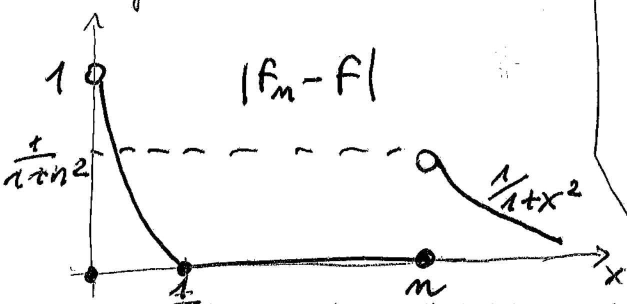
a. **(2 punti)** Si disegni il grafico di f_n; si determini la funzione limite f della successione.



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1}{1+x^2} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

b. **(4 punti)** Si derminino gli insiemi $A \subset \mathbb{R}$ tali che f_n converge uniformemente a f in A.

• Ragioniamo in $x \geq 0$:



$\frac{1}{n}$

•• 0 non può appartenere ad A

••• Se $A = (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ con $a > 0$ fissato

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \max\Big(\underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{\to 0}, \underbrace{f_n(n)}_{\to 0}\Big) = 0$$

Quindi $f_n \to f$ in A uniform.

c. **(2 punti)** Stabilire se vale la relazione $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

• f_n non converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$.

•• $$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 2\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{n} f_n(x)\,dx \right) =$$

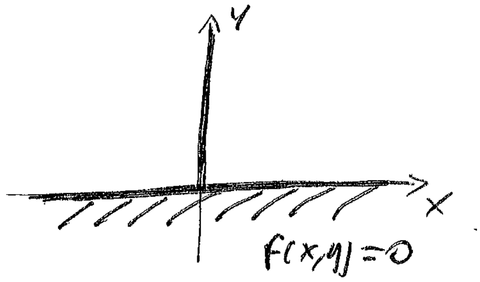
$$= 2\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{n}\frac{n^2}{n^2+1} + \operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg}\frac{1}{n} \right) = \pi$$

••• $$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\infty} = \pi$$

La relazione è vera

2. **(8 punti)** Sia

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^{\frac{3}{2}}y\log y}{|x|+y} & \text{se } y>0\\ 0 & \text{se } y\le 0\end{cases}$$



a. **(2 punti)** Si dimostri che f è continua in tutto $\mathbb{R}^2$.

• Se $x_0 \neq 0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y>0}} |f(x,y)| \le \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y>0}} \left(\frac{|x|^{3/2}}{|x|}\cdot \underbrace{y|\log y|}_{\to 0}\right) = 0 = f(x_0,0)$$

•• in tutti gli altri punti è ovviamente continua.

b. **(3 punti)** Si stabilisca se f è differenziabile nell'origine.

• Poiché f è nulla sui due assi $\Rightarrow \nabla f(0,0)=(0,0)$

•• $$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$ si osservi che il numeratore è identicamente nullo se $h_2 \le 0$

$$= \lim_{\substack{r\to 0^+\\ \theta\in(0,\pi)}} \frac{r^{5/2}|\cos\theta|^{3/2}\sin\theta\log(r\sin\theta)}{r^2\underbrace{(|\cos\theta|+\sin\theta)}_{\ge 1 \text{ in } (0,\pi)}} = 0$$

$h_1 = r\cos\theta$, $h_2 = r\sin\theta$

essendo $r^{\frac{1}{2}}\log r \xrightarrow{r\to 0^+} 0$

c. **(3 punti)** Si stabilisca se f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

• Se $x_0>0$ fissato

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)=0$ essendo f nulla su asse x

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0,t)-f(x_0,0)}{t} =$$

$\lim_{t\to 0^-} \dots = 0$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{|x_0|^{3/2}t\log t}{(|x_0|+t)t} = -\infty$$

Non esiste $\nabla f(x_0,0) \Rightarrow f$ non può essere differenziabile in $(x_0,0)$.

$x_0<0$ simile

•• Se $y_0>0$ fissato

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)=0$ essendo f nulla asse y

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,y_0)-f(0,y_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\text{sgn}(t)|t|^{\frac{1}{2}}y_0\log y_0}{|t|+y_0} = 0$$

$\Rightarrow \nabla f(0,y_0) = (0,0)$.

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{|f(h_1,y_0+h_2)-f(0,y_0)-\nabla f(0,y_0)(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{|h_1|^{3/2}|y_0+h_2||\log(y_0+h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,(|h_1|+y_0+h_2)} \le$$

$$\le \lim_{h_1\to 0}\frac{|h_1|^{3/2}\cancel{y_0}|\log(y_0)|}{|h_1|\cancel{y_0}} = 0$$

f differenziabile in $(0,y_0)$!

3. **(8 punti)** Sia $a > 0$.

a. **(4 punti)** Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y}\left(x^5 + \dfrac{2y^2}{x}\right) = \dfrac{2}{x} y + x^5 y^{-1} \\ y(1) = a \end{cases}$$

• Poniamo $z(x) = (y(x))^2$. Otteniamo

$$z' = \frac{4}{x} z + 2x^5$$

$$z = e^{\int \frac{4}{x} dx}\left[\int 2x^5 e^{-\int \frac{4}{x} dx} dx + c\right]$$

$$= e^{\log x^4}\left[\int 2x^5 e^{\log x^{-4}} dx + c\right]$$

$$= x^4\left[x^2 + c\right] \Rightarrow y(x) = \pm x^2\sqrt{x^2+c}$$

•• essendo $a > 0$, scegliamo il "+":

$a = \sqrt{1+c} \Rightarrow c = a^2 - 1$

$\Rightarrow$ soluzione è

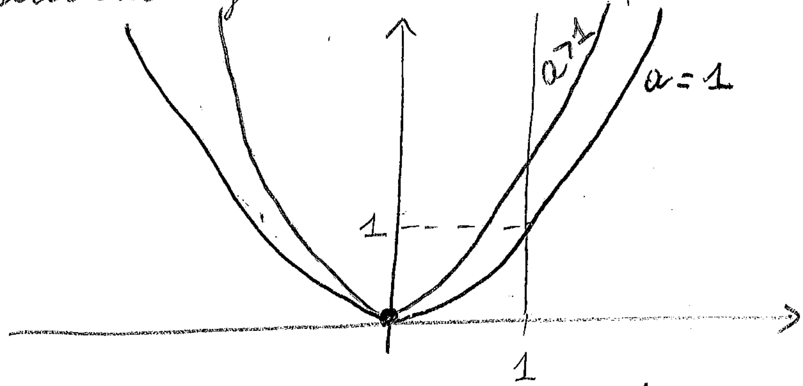
$$y_a(x) = x^2\sqrt{x^2 + a^2 - 1}$$

b. **(2 punti)** Si stabilisca se esistono dei valori di $a > 0$ per cui la soluzione locale è prolungabile su tutto $\mathbb{R}$.

la soluzione locale trovata è prolungabile in $\mathbb{R}$ se e solo se $x^2 + a^2 - 1 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ cioè per $1 - a^2 \leq 0$, cioè $a \geq 1$

c. **(2 punti)** Si stabilisca se esistono dei valori di $a > 0$ per cui la soluzione esiste ed è unica su tutto $\mathbb{R}$.

le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ per $a \geq 1$. I grafici delle y_a sono



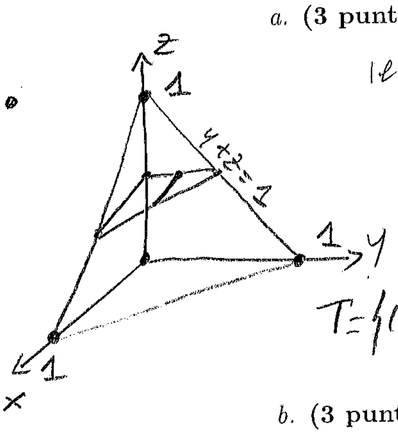
Si noti che $y_a(0) = 0$ e che $y_a'(0) = 0$, $\forall a \geq 1$

Quindi $\forall a \geq 1$ tutte le funzioni $\tilde{y}_{ab}(x) = \begin{cases} y_a(x) & \text{se } x \geq 0 \\ y_b(x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

per $b > 1$ sono soluzioni

4. **(9 punti)** Sia $T \subset \mathbb{R}^3$ il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

a. **(3 punti)** Si determini il volume di T.



il piano per $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ ha equazione $x+y+z=1$

$$\therefore \int_T 1\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} dx\, dy\, dz = \dots = \frac{1}{6}$$

$$T = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1,\ 0 \le y \le 1-z,\ 0 \le x \le 1-z-y\}$$

b. **(3 punti)** Si calcoli, al variare di $\alpha \geq 0$

$$\int_T (1-x-y-z)^\alpha \, dx\, dy\, dz. =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} (1-x-y-z)^\alpha dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} \frac{(1-z-y)^{\alpha+1}}{\alpha+1} dy\, dz = \int_0^1 \frac{(1-z)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} dz =$$

$$= \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}$$

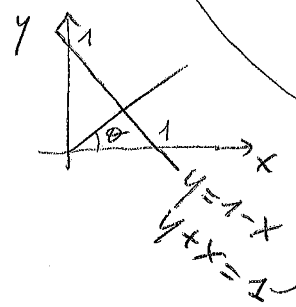
c. **(3 punti)** Si determini per quali valori di α, con $\alpha > 1$, esiste finito

$$\int_T \frac{1}{(1-x-y)(1-x^2-y^2)^\alpha} \, dx\, dy\, dz. =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1-x-y)(1-x^2-y^2)^\alpha} dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{(1-x^2-y^2)^\alpha} dy\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{r}{(1-r^2)^\alpha} dr\, d\theta = \frac{1}{2(\alpha-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(1-r^2)^{1-\alpha}\right]_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} d\theta$$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$



$y+x=1 \to r = \dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$

$$= \frac{1}{2(\alpha-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{(\cos\theta+\sin\theta)^{2(\alpha-1)}}{(2\cos\theta\sin\theta)^{\alpha-1}} - 1 \right] d\theta$$: le chiamiamo $f(\theta)$

Abbiamo problemi di integrabilità per $\theta \to 0^+$ ove $f(\theta) \sim \dfrac{1}{2^{\alpha-1}\theta^{\alpha-1}}$ integrabile se $\alpha - 1 < 1$

e $\theta \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ ove $f(\theta) \sim \dfrac{1}{2^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\alpha-1}}$ → stesse conclusioni

risposta $\boxed{1 < \alpha < 2.}$