Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PROVA SCRITTA– 24 Settembre 2018

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n^3|x|}{1+n^2} & \text{se } |x| \le \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{1+x^2} & \text{se } \frac{1}{n} < |x| \le n \\ 0 & \text{se } |x| > n \end{cases}$$

   a. **(2 punti)** Si disegni il grafico di f_n; si determini la funzione limite f della successione.

   b. **(4 punti)** Si derminino gli insiemi $A \subset \mathbb{R}$ tali che f_n converge uniformemente a f in A.

   c. **(2 punti)** Stabilire se vale la relazione $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. **(8 punti)** Sia

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|x|^{\frac{3}{2}}y\log y}{|x|+y} & \text{se } y>0 \\ 0 & \text{se } y\le 0 \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Si dimostri che f è continua in tutto $\mathbb{R}^2$.

b. **(3 punti)** Si stabilisca se f è differenziabile nell'origine.

c. **(3 punti)** Si stabilisca se f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

3. **(8 punti)** Sia $a > 0$.

a. **(4 punti)** Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y}\left(x^5 + \dfrac{2y^2}{x}\right) \\ y(1) = a \end{cases}$$

b. **(2 punti)** Si stabilisca se esistono dei valori di $a > 0$ per cui la soluzione locale è prolungabile su tutto $\mathbb{R}$.

c. **(2 punti)** Si stabilisca se esistono dei valori di $a > 0$ per cui la soluzione esiste ed è unica su tutto $\mathbb{R}$.

4. **(9 punti)** Sia $T \subset \mathbb{R}^3$ il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

a. **(3 punti)** Si determini il volume di T.

b. **(3 punti)** Si calcoli, al variare di $\alpha \geq 0$

$$\int_T (1 - x - y - z)^\alpha \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

c. **(3 punti)** Si determini per quali valori di α, con $\alpha > 1$, esiste finito

$$\int_T \frac{1}{(1 - x - y)(1 - x^2 - y^2)^\alpha} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$