Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PROVA SCRITTA– 31 Gennaio 2018

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n-2}}{(2n)!}$$

a. **(4 punti)** Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme.

Raggio di convergenza $= +\infty$ in quanto $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = 0$

la convergenza è uniforme in ogni intervallo $[-\rho,\rho]$ $\rho>0$

la convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$ in quanto

$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x) - \sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{x^{4n-2}}{(2n)!}\right| = +\infty$ (vedi punto 2: si faccia $\lim_{x\to\pm\infty}$!)

in alternativa $\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)^{4n-2}}{(2n)!} = +\infty$ quindi il termine generale non va a zero uniformemente

b. **(2 punti)** Si calcoli la somma della serie e la si indichi con $f(x)$.

$$x^{-2}\sum_{1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{x^2}\left[\cos x^2 - 1\right]$$

c. **(2 punti)** Si calcoli, con errore inferiore a 10^{-3}, l'integrale $\int_0^{1/2}\frac{f(x)}{x}\,dx$.

Poichè la convergenza è uniforme in ogni compatto si ha che

$$\int_0^{1/2}\frac{f(x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{1/2}\frac{x^{4n-3}}{(2n)!}\,dx = \sum_{1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!\,(4n-2)\,2^{4n-2}}$$

troviamo quindi il primo indice per cui $(2n)!\,(4n-2)\,2^{4n-2} > 10^3$

per $n=2$ $64\cdot 24\cdot 6 > 1000$ quindi

$$\int_0^{1/2}\frac{f(x)}{x} \simeq \frac{-1}{2!\cdot 2\cdot 2^2} \quad \text{a meno di } 10^{-3}$$

2. **(9 punti)** Sia $a > 0$ e

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{(x^2+y^4)^a} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Dimostrare che f è continua se e solo se $a < \frac{5}{4}$.

$|f(x,y)| \leq (x^2+y^4)^{1+\frac{1}{4}-a} \longrightarrow 0$ se $a < 5/4$

se $a = \frac{5}{4}$ calcoliamo $\lim_{y\to 0^+} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0^+} \frac{y^5}{(2y^4)^{5/4}} = \frac{1}{2^{5/4}} \neq$

b. **(2 punti)** Stabilire per quali valori di a f ammette derivate direzionali secondo ogni direzione in $(0,0)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ poiché f è nulla sugli assi, Sia $v = (\alpha t, \beta t)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{\alpha^2\beta\, t^3}{(\alpha^2+\beta^4 t^2)\, t^{2a}} = \begin{cases} \beta & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a < 1 \\ \text{sig}(\beta)(+\infty) & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

c. **(2 punti)** Dimostrare che f non è differenziabile in $(0,0)$ se $a \geq 1$

per $a > 1$ è evidente. per $a = 1$ notiamo che $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \beta$ mentre $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$: incompatibile con la differenziabilità in quanto dovrebbe essere

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

d. **(2 punti)** Dimostrare che per $0 < a < 1$ f è differenziabile in $(0,0)$

$$\left| \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^2}{(x^2+y^4)^a} \leq 1 \cdot \frac{x^2}{x^{2a}} \longrightarrow 0 \text{ se } a < 1$$

3. **(8 punti)** Si consideri

$$\begin{cases} (1+x^2)y' + 6xy - 3y^{2/3}(1+x^2)\log(3+x^2) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Si provi che per ogni $y_0 \neq 0$ e per ogni x_0 esiste unica la soluzione locale del problema di Cauchy.

La funzione $F(x,y) = -\frac{6xy}{1+x^2} + \frac{3y^{2/3}}{1+x^2}$ è continua in $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ ed è localmente Lipschitz rispetto a y essendo $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{6x}{1+x^2} + \frac{2}{y^{1/3}(1+x^2)}$. Per cui $\exists$ unica la soluzione locale di $\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

a. **(3 punti)** Per ogni $y_0 \neq 0$ e per ogni x_0, si determini la soluzione locale del problema di Cauchy.

Poniamo $z(x) = y(x)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow z' = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} y'$

$\Rightarrow z' = -\frac{2x}{1+x^2} z + \log(3+x^2) \Rightarrow z(x) = e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}dx}\left[\int \log(3+x^2)\, e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx}\, dx + K\right]$

$\Rightarrow z(x) = \frac{1}{1+x^2}\left[\frac{3x+x^3}{3}\log(3+x^2) - \frac{2}{9}x^3 + K\right],\ K\in\mathbb{R}$

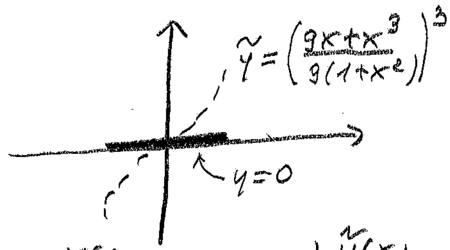
$y = z^3$ e $y(x_0) = y_0 \Rightarrow y(x) = \left[\frac{3x+x^3}{3(1+x^2)} - \frac{2x^3}{9(1+x^2)} + \frac{K}{1+x^2}\right]^3$ (*)

con $K = (1+x_0^2)\left[\sqrt[3]{y_0} - \frac{3(x_0+x_0^3)}{3(1+x_0^2)} - \frac{2x_0^3}{9(1+x_0^2)}\right]$

c. **(3 punti)** Si provi che per $x_0 = y_0 = 0$ esisteno piú soluzioni locali del precedente problema di Cauchy. Si provi inoltre che per $x_0 = y_0 = 0$ esistono infinite soluzioni del problema di Cauchy definite su tutto $\mathbb{R}$.

$y(x) = 0$ è soluzione per il problema di Cauchy con $y(0)=0$

La funzione $\tilde{y}$ in (*) per $K=0$ è soluzione del problema di Cauchy per $y(0)=0$:



Ci sono così almeno 4 soluzioni locali $y_1(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \tilde{y}(x) & x \geq 0 \end{cases}$, $y_2(x) = \begin{cases} \tilde{y}(x) & x<0 \\ 0 & x\geq 0 \end{cases}$,

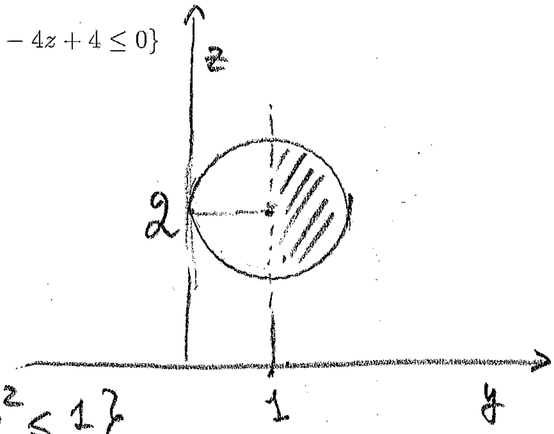
$y_3(x) = \tilde{y}(x)$, $y_4(x) = 0$

Per ogni K, le funzioni y in (*) sono tali che $\lim_{x\to\infty} y(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$: $\Rightarrow \forall K\ \exists\, p_K : y(p_K) = 0$ ed è facile vedere che $y'(p_K) = 0$. Quindi $\forall K : p_K \geq 0$ $\hat{y}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq p_K \\ y(x) & x > p_K \end{cases}$ e $\forall K : p_K < 0$ $\tilde{y}(x) = \begin{cases} y(x) & x \leq p_K \\ 0 & x > p_K \end{cases}$ sono tutte soluzioni

4. **(6 punti)** Sia

$$D = \{(y,z)\ : y \geq 1\ ; y^2 + z^2 - 2y - 4z + 4 \leq 0\}$$

a. **(1 punto)** Disegnare D.



$D = \{(y,z) : y \geq 1 ; (y-1)^2 + (z-2)^2 \leq 1\}$

b. **(3 punti)** Calcolare il volume del solido S che si ottiene facendo ruotare D di 2π attorno all'asse z.

Vol $S = 2\pi \cdot y_B \cdot$ area(D) dove y_B è la y (nel piano (y,z)) del baricentro di D

Quindi Vol $S = 2\pi \int_D y\, dy\, dz$. Poniamo $\begin{cases} y-1 = \rho\cos\theta \\ z-2 = \rho\sin\theta \end{cases}$

$\int_D y\, dy\, dz = \int_{D_0} (1+\rho\cos\theta)\cdot\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}$ $\qquad D_0 = \left\{ 0 \leq \rho \leq 1 ; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$

c. **(2 punti)** Si consideri ora il dominio

$$D' = \{(y,z)\ : y^2 + z^2 - 2y - 4z + 4 \leq 0\}$$

e sia S' il solido ottenuto dalla rotazione completa (un angolo di 2π) di D' attorno all'asse z. Indichiamo con vol$S$, rispettivamente volS' , il volume dei solidi ottenuti. È vero che vol$S' = 2$vol$S$? (si giustifichi la risposta!)

Vol $S = 2\pi\, y_B \cdot \frac{\pi}{2}$

Vol $S' = 2\pi\, \bar{y}_B\, \pi$ $\qquad \bar{y}_B$ è la y del baricentro di D', cioè 1

confrontando le due espressioni appare evidente che

$\bar{y}_B \neq y_B$!