Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PROVA SCRITTA– 31 Gennaio 2018

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Si consideri la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n-2}}{(2n)!}$$

   a. **(4 punti)** Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme.

   b. **(2 punti)** Si calcoli la somma della serie e la si indichi con $f(x)$.

   c. **(2 punti)** Si calcoli, con errore inferiore a 10^{-3}, l'integrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

2. **(9 punti)** Sia $a > 0$ e

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{(x^2 + y^4)^a} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Dimostrare che f è continua se e solo se $a < \frac{5}{4}$.

b. **(2 punti)** Stabilire per quali valori di a f ammette derivate direzionali secondo ogni direzione in $(0,0)$.

c. **(2 punti)** Dimostrare che f non è differenziabile in $(0,0)$ se $a \geq 1$

d. **(2 punti)** Dimostrare che per $0 < a < 1$ f è differenziabile in $(0,0)$

3. **(8 punti)** Si consideri

$$\begin{cases} (1+x^2)y' + 6xy - 3y^{2/3}(1+x^2)\log(3+x^2) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Si provi che per ogni $y_0 \neq 0$ e per ogni x_0 esiste unica la soluzione locale del problema di Cauchy.

a. **(3 punti)** Per ogni $y_0 \neq 0$ e per ogni x_0, si determini la soluzione locale del problema di Cauchy.

c. **(3 punti)** Si provi che per $x_0 = y_0 = 0$ esisteno piú soluzioni locali del precedente problema di Cauchy. Si provi inoltre che per $x_0 = y_0 = 0$ esistono infinite soluzioni del problema di Cauchy definite su tutto $\mathbb{R}$.

4. **(6 punti)** Sia

$$D = \{(y, z)\ : y \geq 1\,; y^2 + z^2 - 2y - 4z + 4 \leq 0\}$$

a. **(1 punto)** Disegnare D.

b. **(3 punti)** Calcolare il volume del solido S che si ottiene facendo ruotare D di 2π attorno all'asse z.

c. **(2 punti)** Si consideri ora il dominio

$$D' = \{(y, z)\ : y^2 + z^2 - 2y - 4z + 4 \leq 0\}$$

e sia S' il solido ottenuto dalla rotazione completa (un angolo di 2π) di D' attorno all'asse z. Indichiamo con vol$S$, rispettivamente volS' , il volume dei solidi ottenuti. È vero che vol$S' = 2$vol$S$? (si giustifichi la risposta!)