Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PROVA SCRITTA– 6 Luglio 2018

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)**
   Data la successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{n^a x}{n + (n-x)^2}$$

   a. **(4 punti)** Se ne determini, al variare di $a \in \mathbb{R}$ l'insieme E_a di convergenza semplice.

$f_n(0) = 0 \quad \forall a \qquad x \neq 0 \quad f_n(x) \simeq \frac{n^a x}{n^2}$; la funzione limite $f(x)$ è

$$\begin{cases} 0 & \text{se } a < 2 \\ x & \text{se } a = 2 \\ \nexists & \text{se } a > 2 \text{ per } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } a > 2 \text{ e } x = 0 \end{cases}$$

$E_a = (-\infty, +\infty)$ se $a \leq 2$

$E_a = \{0\}$ se $a > 2$

   b. **(4 punti)** Si stabilisca quindi per quali valori di a la convergenza è uniforme su E_a.

$$f_n'(x) = n^a \frac{(n + n^2 - x^2)}{(n + (n-x)^2)^2} \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\sqrt{n^2+n}\right) = \frac{n^a \sqrt{n^2+n}}{n + (n - \sqrt{n^2+n})^2}$$

Se $a < 2$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \sup_x |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \to +\infty} f_n(\sqrt{n^2+n}) = 0 \iff a < 0$

Se $a = 2$ $\quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - x| \geq |f_n(n) - n| = n^2 - n \to +\infty$ per $n \to +\infty$

La convergenza è uniforme su E_a per $a < 0$ e, banalmente, per $a > 2$

2. **(9 punti)**

Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)e^{-\frac{y^2}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si dimostri che f è continua in tutto $\mathbb{R}^2$.

- I punti (x,y) con $x \neq 0$: sono certamente di continuità per f
- I punti $(0,y_0)$ con $y_0 \neq 0$: $\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} (x+y)e^{-\frac{y^2}{x^2}} = 0$ poiché $(x+y) \to y_0$ e $-\frac{y^2}{x^2} \to -\infty$ essendo $y_0 \neq 0$.
- Il punto $(0,0)$: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|(x+y)e^{-\frac{y^2}{x^2}}\right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |(x+y)| = 0$

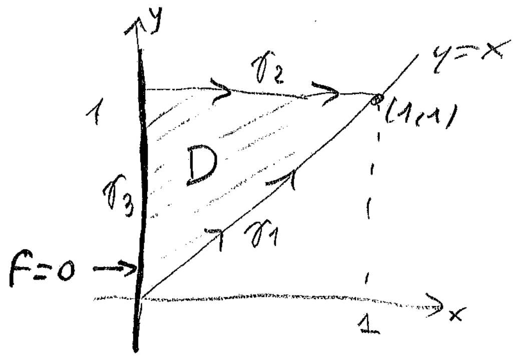
b. **(3 punti)** Si stabilisca se f è differenziabile nell'origine.

- Calcoliamo $\nabla f(0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ ovviamente; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 1$.
- Differenziabilità di f in $(0,0)$: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$

$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)e^{-\frac{y^2}{x^2}} - x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; lungo $y=x$ si vede subito che il limite non esiste. Quindi f non differenziabile

c. **(3 punti)** Si determinino eventuali massimi e minimi della funzione f in

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$



- In $int(D)$, f è positiva, differenziabile e $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \neq (0,0)$ sempre.

Essendo f continua in D, D compatto i Max e i Min esistono e sono in ∂D

- I Minimi sono tutti i punti $(0,y_0)$ con $y_0 \in [0,1]$ essendo ivi $f=0$ e $f>0$ in $int(D)$
- Studiamo i bordi γ_2 e γ_1

$f|_{\gamma_1} = f(x,x) = 2xe^{-1}$ sempre crescente per $x \in [0,1]$

$f|_{\gamma_2} = f(x,1) = (x+1)e^{-\frac{1}{x^2}}$ sempre crescente (basta studiare la derivata) per $x \in [0,1]$

$\Rightarrow (1,1)$ è Max di f in D

3. **(8 punti)**

a. **(4 punti)** Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$x^2y'' + xy' + 9y = 0 \qquad x > 0 .$$

poniamo $x = e^t$.

Posto $\varphi(t) = y(e^t)$, denotando con $\dot\varphi$ e $\ddot\varphi$ le derivate rispetto a t, si ottiene che φ deve soddisfare l'equazione

$\ddot\varphi + 9\varphi = 0$ cioè $\varphi(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$

quindi $y(x) = c_1 \cos(3 \log x) + c_2 \sin(3 \log x)$

b. **(4 punti)** Si risolva quindi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + 9y = \log(27x) \\ y(e^\pi) = \frac{\log 3}{3} + \frac{\pi}{9} \\ y'(e^\pi) = 0 \end{cases}$$

Con le stesse notazioni di prima otteniamo ora il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot\varphi + 9\varphi = 3\log 3 + t \\ \varphi(\pi) = \frac{\log 3}{3} + \pi/9 \\ \frac{\dot\varphi(\pi)}{e^\pi} = 0 \end{cases}$$

cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea del tipo $A + Bt$

deve essere

$9A + 9Bt = 3\log 3 + t$

quindi $A = \frac{\log 3}{3}$ $B = \frac{1}{9}$

l'integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi $c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t + \frac{\log 3}{3} + \frac{1}{9}t$

imponendo le condizione iniziale si ha

$-c_1 + \frac{\log 3}{3} + \frac{\pi}{9} = \frac{\log 3}{3} + \pi/9 \Rightarrow c_1 = 0$

$-3c_2 + \frac{1}{9} = 0 \qquad c_2 = \frac{1}{27}$

quindi la soluzione del problema iniziale è $y(x) = \frac{1}{27}\sin(3\log x) + \frac{\log 3}{3} + \frac{\log x}{9}$

4. **(8 punti)** Sia $f(x,y) = xy\cos(xy)$.

a. **(5 punti)** Si calcoli $\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ in

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x \le y \le 2x,\ \frac{2}{x}\pi \le y \le \frac{3}{x}\pi,\ x>0\right\}.$$

• Poniamo $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$ che trasforma D

in $D' = \{(u,v) : 1 \le v \le 2,\ 2\pi \le u \le 3\pi\}$.

Essendo $\begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases} \Rightarrow \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2v}$

•• $$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2\int_{2\pi}^{3\pi} u(\cos u)\frac{1}{2v}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_1^2 \frac{1}{v}\,dv\right)\left(\int_{2\pi}^{3\pi} u\cos u\,du\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2\,(-2) = -\ln 2$$

b. **(3 punti)** Sia $E = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ 0 \le \sqrt{y^2+z^2} \le \frac{1}{4x}\pi,\ x>0\right\}$. Si stabilisca se essite finito

$$\int_E f(x,\sqrt{y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_E x\sqrt{y^2+z^2}\cos\left(x\sqrt{y^2+z^2}\right)dx\,dy\,dz$$

• Poniamo

$\begin{cases} x = x \\ y = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases}$ che trasforma E

in $E' = \{(x,\rho,\theta) : 0 \le \rho \le \frac{\pi}{4x},\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ x>0\}$

• $$\int_E f(x,\sqrt{y^2+z^2})\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4x}}\int_0^{2\pi} x\rho\cos(x\rho)\,\rho\,d\theta\,d\rho\,dx \ge$$

$\cos(x\rho) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$

Poiché $0 \le \rho x \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos(x\rho) \le 1$ in E'

$$\ge \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4x}} x\rho^2\frac{\sqrt{2}}{2}\,2\pi\,d\rho\,dx = \sqrt{2}\pi\int_0^{\infty} x\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^{\frac{\pi}{4x}}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi^4}{3\cdot 4^3}\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = +\infty$$

poiché non è integrabile in 0.