Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PROVA SCRITTA– 6 Luglio 2018

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)**
   Data la successione di funzioni
   $$f_n(x) = \frac{n^a x}{n + (n-x)^2}$$

   a. **(4 punti)** Se ne determini, al variare di $a \in \mathbb{R}$ l'insieme E_a di convergenza semplice.

   b. **(4 punti)** Si stabilisca quindi per quali valori di a la convergenza è uniforme su E_a.

2. **(9 punti)**

Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)e^{-\frac{y^2}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si dimostri che f è continua in tutto $\mathbb{R}^2$.

b. **(3 punti)** Si stabilisca se f è differenziabile nell'origine.

c. **(3 punti)** Si determinino eventuali massimi e minimi della funzione f in

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$

3. **(8 punti)**

a. **(4 punti)** Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$x^2y'' + xy' + 9y = 0 \qquad x > 0\,.$$

b. **(4 punti)** Si risolva quindi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + 9y = \log(27x) \\ y(e^\pi) = \frac{\log 3}{3} + \frac{\pi}{9} \\ y'(e^\pi) = 0 \end{cases}$$

4. **(8 punti)** Sia $f(x,y) = xy\cos(xy)$.

a. **(5 punti)** Si calcoli $\displaystyle\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ in

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \le y \le 2x,\ \frac{2}{x}\pi \le y \le \frac{3}{x}\pi,\ x > 0\right\}.$$

b. **(3 punti)** Sia $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le \sqrt{y^2+z^2} \le \frac{1}{4x}\pi,\ x > 0\right\}$. Si stabilisca se esiste finito

$$\int_E f(x, \sqrt{y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$