Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PRIMA PROVA PARZIALE – 6 Dicembre 2017

FILA A

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Sia $\beta > 0$ fissato e

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x||y|^\beta}{\sqrt{y^4+4x^4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si stabilisca

a. **(3 punti)** che la funzione f è continua nell'origine se e solo se $\beta > 1$;

b. **(2 punti)** i valori di β per cui f ammette tutte le derivate direzionali nell'origine;

c. **(3 punti)** i valori di β per cui f è differenziabile nell'origine.

2. **(8 punti)** Si consideri la funzione $f(x,y) = (x+y)e^{-y^2-x}$.

   a. **(4 punti)** Si determinino gli eventuali massimi e minimi locali della f nel suo dominio.

   b. **(4 punti)** Si determinino gli eventuali massimi e minimi della funzione f in

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 \leq -x, \; -1 \leq x \leq 0\}.$$

3. **(6 punti)** Si calcoli

$$\int_D \frac{y^2}{x} e^{xy} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

dove

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{3y} \leq x \leq \frac{1}{2y}, \ y^2 \leq x \leq 2y^2 \right\}.$$

4. **(4 punti)** Sia

$$f(x,y) = \int_1^x \log \sqrt[3]{t} \,\mathrm{d}t + x e^{y^3} + y^2.$$

Si tracci un grafico qualitativo (retta tangente e concavitá) in $B((1,0),r)$, con $r > 0$ piccolo a piacere, della curva di livello (o insieme di livello) di f che passa per il punto $(1,0)$.

5. **(8 punti)** Si verifichi che $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{(y^2 + z^2)^2}$ é integrabile in

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 < y < x^2 + y^2 < x < z\}$$

e si calcoli

$$\int_D f(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PRIMA PROVA PARZIALE – 6 Dicembre 2017

FILA B

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Sia $\alpha > 0$ fissato e

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|}{\sqrt{y^4 + 9x^4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si stabilisca

a. **(3 punti)** che la funzione f è continua nell'origine se e solo se $\alpha > 1$;

b. **(2 punti)** i valori di α per cui f ammette tutte le derivate direzionali nell'origine;

c. **(3 punti)** i valori di α per cui f è differenziabile nell'origine.

2. **(8 punti)** Si consideri la funzione $f(x,y) = (y-x)e^{-y^2+x}$.

   a. **(4 punti)** Si determinino gli eventuali massimi e minimi locali della f nel suo dominio.

   b. **(4 punti)** Si determinino gli eventuali massimi e minimi della funzione f in

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 \leq x, \ 0 \leq x \leq 1\}.$$

3. **(6 punti)** Si calcoli

$$\int_D \frac{x^2}{y} e^{xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

dove

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{2x} \leq y \leq \frac{1}{x}, \ 2x^2 \leq y \leq 3x^2 \right\}.$$

4. **(4 punti)** Sia

$$f(x,y) = \int_1^x \log \sqrt{t} \, \mathrm{d}t + x e^{y^2} + y^4.$$

Si tracci un grafico qualitativo (retta tangente e concavitá) in $B((1,0),r)$, con $r > 0$ piccolo a piacere, della curva di livello (o insieme di livello) di f che passa per il punto $(1,0)$.

5. **(8 punti)** Si verifichi che $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{(x^2+z^2)^2}$ é integrabile in

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < x < x^2 + y^2 < y < z\}$$

e si calcoli

$$\int_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$