Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
SECONDA PROVA PARZIALE – 31 Gennaio 2018

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

Prova orale (una sola crocetta): ☐ 9 Febbraio ☐ 28 Febbraio ☐ Giugno-Luglio

---

1. **(8 punti)** Si consideri la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n-2}}{(2n)!}$$

   a. **(4 punti)** Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme.

   b. **(2 punti)** Si calcoli la somma della serie e la si indichi con $f(x)$.

   c. **(2 punti)** Si calcoli, con errore inferiore a 10^{-3}, l'integrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

2. **(9 punti)** Sia $\alpha > 0$ e si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{|x|^n}{x^{2n} + n^\alpha}.$$

a. **(3 punti)** Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ e si determinino gli α per cui si ha convergenza uniforme in $\mathbb{R}$;

b. **(3 punti)** Si provi che per $\alpha > 2$ la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$;

c. **(3 punti)** Si provi che per $\alpha > 1$ si ha $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\, \mathrm{d}x.$

3. **(8 punti)** Si consideri

$$\begin{cases} (1+x^2)y' + 6xy - 3y^{2/3}(1+x^2)\log(3+x^2) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Si provi che per ogni $y_0 \neq 0$ e per ogni x_0 esiste unica la soluzione locale del problema di Cauchy.

a. **(3 punti)** Per ogni $y_0 \neq 0$ e per ogni x_0, si determini la soluzione locale del problema di Cauchy.

c. **(3 punti)** Si provi che per $x_0 = y_0 = 0$ esisteno piú soluzioni locali del precedente problema di Cauchy. Si provi inoltre che per $x_0 = y_0 = 0$ esistono infinite soluzioni del problema di Cauchy definite su tutto $\mathbb{R}$.

4. **(5 punti)** Si risolva il seguente problema

$$\begin{cases} x^2 y'' + x y' + y = \log x \\ y(1) = y'(1) = 1 \end{cases}$$

5. **(5 punti)** Si determini l'integrale generale di

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -2x + y \end{cases}$$