Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PRIMA PROVA PARZIALE – 6 Dicembre 2017

FILA B

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Sia $\alpha > 0$ fissato e

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|}{\sqrt{y^4+9x^4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si stabilisca

a. **(3 punti)** che la funzione f è continua nell'origine se e solo se $\alpha > 1$;

$$|x|^\alpha \cdot |y| = |x|^{4\cdot\frac{\alpha}{4}} \cdot |y|^{4\cdot\frac{1}{4}} \leq (|x|^4+|y|^4)^{\frac{\alpha+1}{4}} \quad \text{quindi}$$

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{(x^4+y^4)^{\frac{\alpha+1}{4}}}{\sqrt{y^4+9x^4}} \leq (x^4+y^4)^{\frac{\alpha+1}{4}-\frac{1}{2}} \quad \text{se } \alpha>1 \quad f(x,y) \to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0)$$

se $\alpha \leq 1$ $f(x,x) \not\to 0$ per $x \to 0$

b. **(2 punti)** i valori di α per cui f ammette tutte le derivate direzionali nell'origine;

$f_x = f_y = 0$ in $(0,0)$ $\quad x = at \quad y = bt$ con $a \neq 0$ $b \neq 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|^{\alpha+1}|a|^\alpha \cdot |b|}{t^3\sqrt{9a^4+b^4}} \quad \exists \text{ FINITO} \iff \alpha > 2$$

c. **(3 punti)** i valori di α per cui f è differenziabile nell'origine.

Deve essere $\alpha > 2$ necessariamente. Osserviamo che

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|^\alpha \cdot |y|}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{9x^4+y^4}} \leq \frac{|x|^\alpha}{\sqrt{9x^4+y^4}} \leq$$

$$\leq \frac{(x^4+y^4)^{\alpha/4}}{\sqrt{x^4+y^4}} \to \text{ se } \alpha > 2 \quad \text{quindi } f \text{ è differenziabile se e solo se } \alpha > 2$$

2. **(8 punti)** Si consideri la funzione $f(x,y) = (y-x)e^{-y^2+x}$.

a. **(4 punti)** Si determinino gli eventuali massimi e minimi locali della f nel suo dominio.

$f_x = -e^{-y^2+x} + (y-x)e^{-y^2+x}$; $f_y = e^{-y^2+x} + (y-x)e^{-y^2+x}(-2y)$ $\quad \nabla f = 0 \iff x = -\frac{1}{2}\ y = \frac{1}{2}$

$f_{xx} = -e^{-y^2+x} + [\ ]$; $f_{yx} = 2ye^{-y^2+x} + [\ ]$; $f_{yy} = -2ye^{-y^2+x} - 2(y-x)e^{-y^2+x} - 2y[\ ]$

dove [ ] indica una quantità che si annulla se $x = -1/2$ e $y = 1/2$ e quindi non viene riportata!

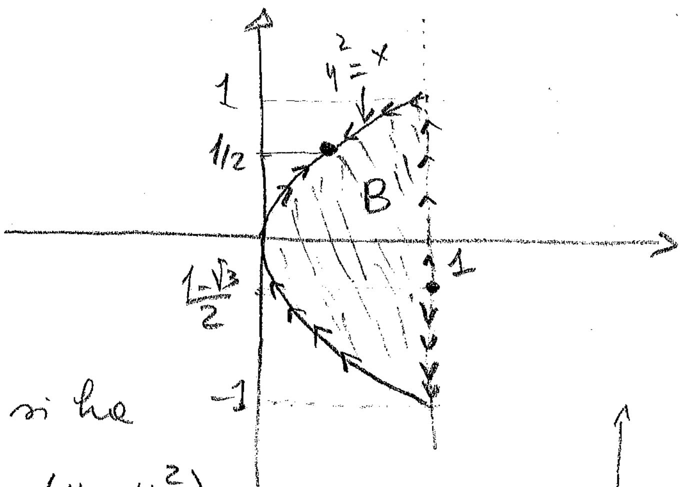
$$Hf(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -e^{-3/4} & e^{-3/4} \\ e^{-3/4} & -3e^{-3/4} \end{pmatrix}$$

$\det = e^{-3/2}[3-1] > 0 \quad f_{xx} < 0$

quindi $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ è un massimo relativo

b. **(4 punti)** Si determinino gli eventuali massimi e minimi della funzione f in

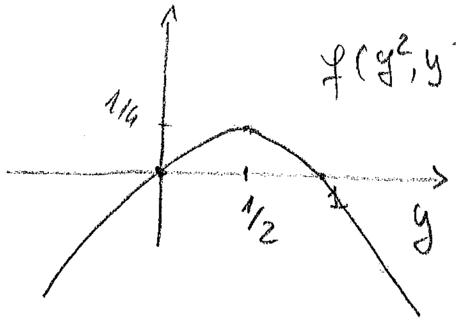
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 \le x, \ 0 \le x \le 1\}.$$



All'interno di B non ci sono estremanti. Essendo B compatto essi si trovano sulla frontiera.

Su $y^2 = x$ si ha

$f(y^2,y) = (y - y^2)$



sse $x = 1$ si ha

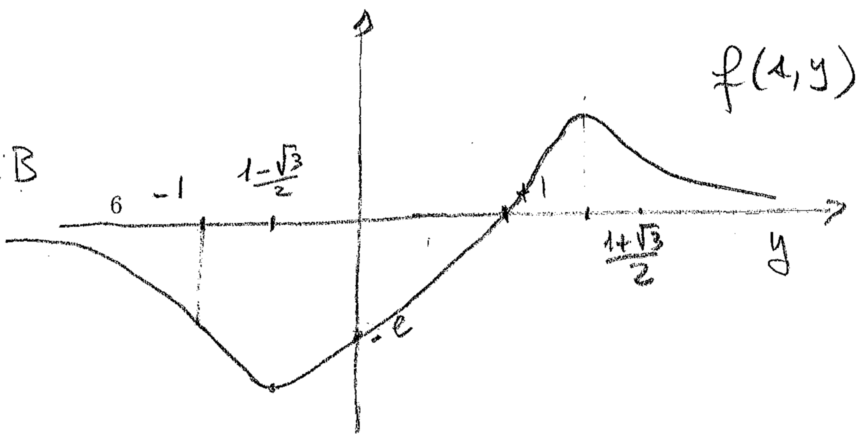
$f(1,y) = (y-1)e\,e^{-y^2}$

$f'(1,y) = 0$ sse

$y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ o $y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ è Massimo assoluto in B

$\left(1,\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ è minimo assoluto in B



3. **(6 punti)** Si calcoli
$$\int_D \frac{x^2}{y} e^{xy}\, dx\, dy$$
in
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{2x} \le y \le \frac{1}{x}, \ 2x^2 \le y \le 3x^2 \right\}.$$

posto $\begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x^2} = v \end{cases}$ risulta $\begin{cases} x = u^{1/3} v^{-1/3} \\ y = u^{2/3} v^{1/3} \end{cases}$ $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} u^{-2/3} v^{-1/3} & -\frac{1}{3} v^{-4/3} u^{1/3} \\ \frac{2}{3} u^{-1/3} v^{1/3} & \frac{1}{3} u^{2/3} v^{-2/3} \end{pmatrix}$

Quindi
$$\int_D \frac{x^2}{y} e^{xy} dx\, dy = \int_{D'} \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{3v} \cdot e^{u} du\, dv =$$ $\boxed{\text{dove } D' = \left\{ \frac{1}{2} \le u \ 1 \ ; \ 2 \le v \le 3 \right\}}$

$$= \left[e^u \right]_{1/2}^{1} \cdot \left[-\frac{1}{3v} \right]_2^3 = (e - \sqrt{e}) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9} \right)$$

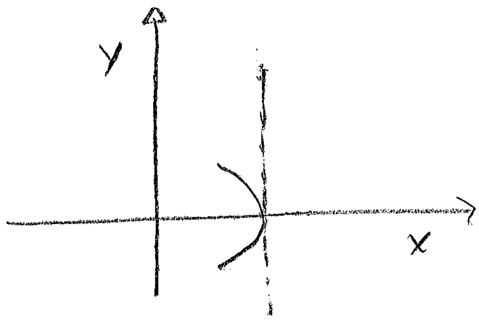
4. **(4 punti)** Sia
$$f(x,y) = \int_1^x \log \sqrt{t}\, dt + x e^{y^2} + y^4.$$

Si tracci un grafico qualitativo (retta tangente e concavitá) in $B((1,0),r)$, con $r > 0$ piccolo a piacere, della curva di livello (o insieme di livello) di f che passa per il punto $(1,0)$.

$f_x = \log\sqrt{x} + e^{y^2}$ $\quad f_y = 2yxe^{y^2} + 4y^3$ $\quad f_x(1,0) = 1$ $\quad f_y(1,0) = 0$

$x = x(y)$

$x''(0) = -2$



5. **(8 punti)** Si verifichi che $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{(x^2+z^2)^2}$ é integrabile in

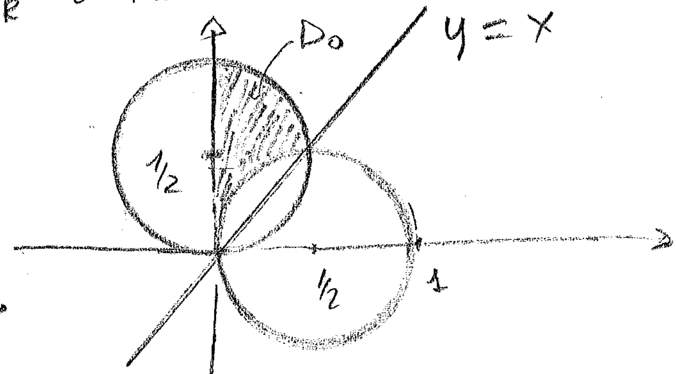
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < x < x^2 + y^2 < y < z\}$$

e si calcoli

$$\int_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

$f(x,y,z) \geq 0$ su D. Quindi posso calcolare l'integrale come

$\lim_{R\to+\infty} \int_{Q_R} f(x,y,z)dxdydz$ dove $Q_R = [-R,R]\times[-R,R]\times[-R,R]$



Sia D_0 la proiezione di D sul piano x y. Se R è abbastanza grande risulta

$D \cap Q_R = \{(x,y,z) : (x,y) \in D_0;\ y < z < R\}$

Passiamo in coordinate cilindriche;

sia D'_R il corrispondente di $D \cap Q_R$ in coordinate cilindriche

$$D'_R = \left\{(\rho,\theta,z) : \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2};\ \cos\theta < \rho < \sin\theta;\ \rho\sin\theta < z < R\right\}$$

$$\int_{D\cap Q_R} f = \int_{D'_R} \frac{\rho^3 \sin\theta\cos\theta \cdot z}{(\rho^2\cos^2\theta + z^2)^2}$$

svolgiamo gli integrali nel seguente ordine: prima rispetto a z, poi ρ poi θ:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \sin\theta\cos\theta \int_{\cos\theta}^{\sin\theta} \rho^3 d\rho \int_{\rho\sin\theta}^{R} \frac{z\,dz}{(\rho^2\cos^2\theta + z^2)^2} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_{\cos\theta}^{\sin\theta} \rho^3 \left[\frac{1}{2\rho^2} - \frac{1}{2(R^2+\rho^2\cos^2\theta)}\right.$$

Occupiamoci della parte che non contiene R:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \int_{\cos\theta}^{\sin\theta} \frac{\rho}{2} d\rho = \frac{1}{4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \left[\sin^2\theta - \cos^2\theta\right] = -\frac{1}{8} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(2\theta)(\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{32}$$

Per la parte che contiene R devo integrare

$F(\rho,\theta,R) = \dfrac{\rho^3\cos\theta\sin\theta}{2(\rho^2\cos^2\theta + R^2)}$ su un insieme LIMITATO e poi fare il limite di tale integrale per $R \to +\infty$. Siccome $F(\rho,\theta,R) \leq \dfrac{\rho^3\cos\theta\sin\theta}{2R^2}$ tale limite è zero