

Fondamenti di Matematica Attuariale - Prof. Fabio Bellini
Prova del 5/2/2021 - Tempo a disposizione 75 minuti

Esercizio 1 Considerare la funzione

$$S_0(x) = \left(1 - \frac{x}{100}\right)^{1/4} \quad x = 0, \dots, 100.$$

- Disegnare il grafico di S_0 e verificare che può rappresentare una funzione di sopravvivenza
- Calcolare la funzione di sopravvivenza condizionata $S_{20}(x)$ e disegnarne il grafico. Quale relazione sussiste tra $S_0(x)$ e $S_{20}(x)$?
- Calcolare ${}_{20}P_{20}$, ${}_{20}Q_{20}$, ${}_{20|10}Q_{20}$
- Calcolare le aspettative di vita complete $\overset{\circ}{e}_0$ e $\overset{\circ}{e}_{20}$
- Calcolare la forza di mortalità μ_x e disegnarne il grafico.

Esercizio 2 Spiegare il significato attuariale delle notazioni

$${}_nE_x, {}_nA_x, A_x, {}_na_x, a_x,$$

e ricavarne la corrispondente espressione matematica. Spiegare perché valgono le relazioni ricorsive

$$A_x = v \cdot q_x + v \cdot p_x \cdot A_{x+1}$$

$$a_x = v \cdot p_x + v \cdot p_x \cdot a_{x+1}$$

Utilizzando la tavola di mortalità

x	l_x
40	98120
41	98021
42	97913
43	97795

e un tasso annuo $i = 5\%$, calcolare ${}_3E_{40}$, ${}_3A_{40}$, ${}_3a_{40}$.

Esercizio 3 Definire il concetto di premio di indifferenza e di premio esponenziale, e spiegare perché il premio esponenziale corrisponde al premio di indifferenza per la funzione di utilità $u(x) = -\exp(-\lambda x)$. Calcolare il premio equo e il primo esponenziale per la variabile casuale

$$D = \begin{cases} 10 & \text{con prob. } 1/3 \\ 20 & \text{con prob. } 1/3, \\ 30 & \text{con prob. } 1/3 \end{cases}$$

ipotizzando che il tasso di interesse sia $i = 5\%$ e che il coefficiente di avversione al rischio sia $\lambda = 0.1$. Quale relazione sussiste tra i due premi?