

Fondamenti di Matematica Attuariale - Prof. Fabio Bellini
Prova del 13/7/2021 - Tempo a disposizione 90 minuti

Esercizio 1 Definire i concetti di funzione di sopravvivenza alla nascita S_0 e di forza di mortalità μ_x , ricavando le relazioni

$$\mu_x = \frac{f_0(x)}{S_0(x)} \text{ e } S_0(t) = \exp\left(-\int_0^t \mu_x dx\right).$$

- a) Ricavare S_0 nel caso in cui $\mu_x = \lambda$. Di quale variabile casuale S_0 è la funzione di sopravvivenza? Che cosa si intende con "proprietà di assenza di memoria"?
- b) Verificare che se $\mu_x = Bc^x$ si ottiene

$$S_0(t) = \exp\left(\frac{B(1-c^t)}{\ln c}\right)$$

- c) Spiegare perché se $B > 0$ e $c > 1$ la funzione $S_0(t)$ ottenuta al punto b) soddisfa $S(0) = 1$ ed è una funzione decrescente. Qual è l'età massima raggiungibile in questo modello?
- d) Nel caso in cui $B = 0.0003$ e $c = 1.07$ calcolare la probabilità che un nuovo nato superi l'età di 70 anni

Esercizio 2 Spiegare il significato delle notazioni attuariali

$${}_nE_x, {}_nA_x, A_x, {}_na_x, a_x$$

e ricavarne la corrispondente espressione matematica. Utilizzando la tavola di mortalità

x	ℓ_x
50	96000
51	95900
52	95700
53	95400,

e un tasso annuo di valutazione $i = 5\%$, calcolare ${}_3E_{50}$, ${}_3A_{50}$, ${}_3a_{50}$, ${}_3\ddot{a}_{50}$.

Esercizio 3 Definire i concetti di premio esponenziale, premio di Esscher, premio media-varianza e premio media-deviazione standard. Calcolare ciascuno dei 4 premi per la variabile casuale

$$D = \begin{cases} 0 & \text{con prob. } 1/3 \\ 1 & \text{con prob. } 1/3, \\ 2 & \text{con prob. } 1/3 \end{cases}$$

utilizzando come parametri per il premio esponenziale $\lambda = 1$ e $r = 5\%$, per il premio di Esscher $\alpha = 1$ e $r = 5\%$, per il premio media varianza e per il premio media-standard $\beta = 1$.