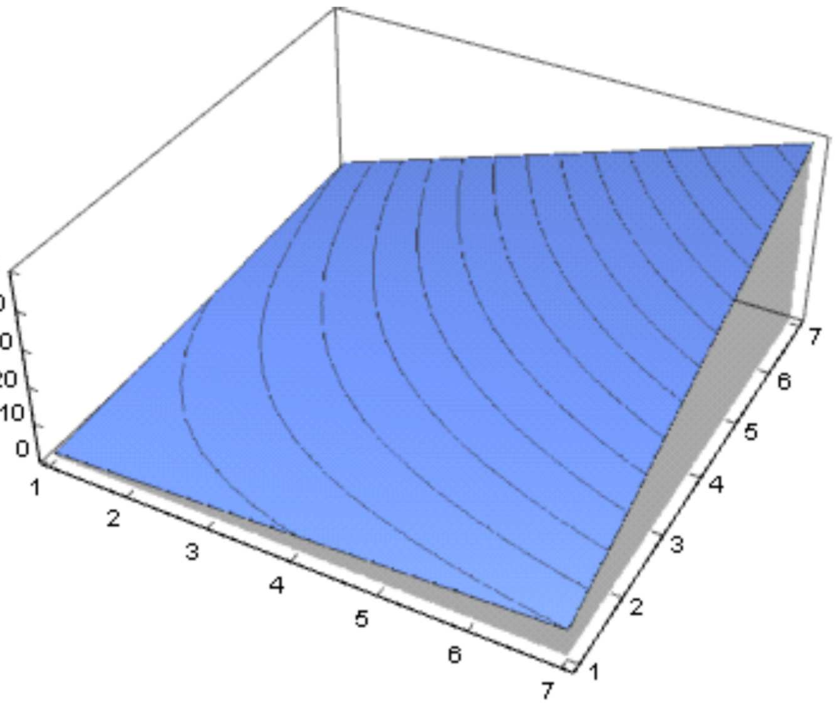
ESERCIZI SULLE RELAZIONI DI DUALITA' NELLA SFERA DEL CONSUMO
(Presuppone lo studio dei Capitoli 2 e 3 di Gravelle-Rees (nelle parti indicate nel programma)

1. Dall'utilità diretta alle funzioni di domanda

Dato un insieme convesso[1] di relazioni di preferenze individuali, la funzione di utilità è quasi-concava (vedi Note su Massimi e Minimi) e le relative curve di livello (curve di indifferenza) sono strettamente convesse. Sotto queste ipotesi, la massimizzazione vincolata dell'utilità definisce funzioni monotone e continue di domanda.

Scegliamo ad esempio $U = XY$ quale funzione $U(X,Y): R^2_{++} \rightarrow R$ di classe C^2 che rappresenta una funzione di utilità continua che definiamo nel dominio $D \equiv [1,\infty] \times [1,\infty]$.



Come si vede questa funzione di utilità è continua e monotona crescente. Già si nota che le curve di livello (curve di indifferenza) sono convesse (iperboli equilatere).
Chiediamoci se la funzione è concava, quasi concava o convessa. A questo fine calcoliamo gli elementi della matrice simmetrica Hessiana corrispondente alla funzione scelta:

$$\partial^2 U(.) / \partial X^2 = 0$$
$$\partial^2 U(.) / \partial Y^2 = 0$$
$$\partial^2 U(.) / \partial X \partial Y = \partial^2 U(.) / \partial Y \partial X = 1$$

[1] Pro-memoria: Un insieme $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$ è convesso se $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$ e $\forall\, \lambda \in [0,1]$ abbiamo $\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$. Gli insiemi sono convessi o non convessi: non esistono insiemi concavi.

Quindi

$$H = \begin{bmatrix} \partial^2 U(.)/\partial X^2 & \partial^2 U(.)/\partial X \partial Y \\ \partial^2 U(.)/\partial Y \partial X & \partial^2 U(.)/\partial Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per cui è agevole osservare che $\| H_1 \| = 0$ e

$$\begin{aligned} \| H_2 \| &= \left(\partial^2 U(.)/\partial X^2 \right)\left(\partial^2 U(.)/\partial Y^2 \right) - \left(\partial^2 U(.)/\partial X \partial Y \right)^2 \\ &= (0 \times 0) - (1 \times 1) \\ &= -1 < 0 \end{aligned}$$

La matrice è quindi NON DEFINITA POSITIVA. La funzione non è convessa (facciamocelo bastare). Allo stesso risultato si perviene analizzando gli autovalori di *H*. Cerchiamo il polinomio caratteristico e annulliamolo:

$$\begin{Vmatrix} 0 - r & 1 \\ 1 & 0 - r \end{Vmatrix} = r^2 - 1 = 0$$

che ha due radici reali: 1 e – 1. Gli autovalori sono quindi di segno alternato e il loro prodotto corrisponde al determinante di *H* e la loro somma alla traccia.

Il grado di omogeneità della funzione è 2. Infatti, $U(\lambda X, \lambda Y) = \lambda X \lambda Y = \lambda^2 XY = \lambda^2 U(X,Y)$. Allo stesso risultato ci porta il teorema di Eulero:

$$[\partial U(X,Y)/\partial X]X + [\partial U(X,Y)/\partial Y]Y = XY + XY = 2XY = 2U(X,Y).$$

Data la funzione $U = XY$, supponiamo adesso che Tizia/o disponga di un importo spendibile *R (mai chiamarlo reddito!)* da distribuire sui 2 beni, dati i loro prezzi p_X e p_Y.
Procediamo alla derivazione delle funzioni di domanda e delle principali relazioni di dualità.

1. Domanda compensata e funzione di spesa

Primo obiettivo: la domanda compensata

Il primo problema che studiamo è il seguente: Tizia/o vuole determinare i valori di *X* e di *Y* che le/gli consentano di **minimizzare la spesa totale rispettando un vincolo dato da un valore assegnato al livello della sua utilità**, ad esempio rispettando un livello di utilità che, poniamo, deve essere pari a $\overline{U} > 0$. Siamo quindi interessati alla ricerca di un valore **minimo della spesa** relativa all'acquisto di *X* e a *Y* derivante, dati i prezzi totalmente esogeni, da **domande dei due beni** che tengano conto del **vincolo sul livello di utilità**, ovvero che permettano di conseguire una utilità pari a $\overline{U} > 0$. Una volta trovate le domande che dipendono dai prezzi e dal livello di utilità data, le utilizzeremo per costruire una funzione che leghi assieme spesa, prezzi e utilità e offra la risposta al problema che ci siamo posti: quale deve essere il livello minimo della spesa.

Troveremo le suddette domande risolvendo il seguente problema[2]:

$$MIN_{X,Y} \underbrace{p_X X + p_Y Y}_{\text{SPESA}} \text{ soggetta al vincolo } XY = \bar{U}$$

La corrispondente funzione Lagrangiana è

$$\Lambda = p_X X + p_Y Y - \lambda\left[XY - \bar{U}\right]$$

e le condizioni del primo ordine (supponendo soddisfatte quelle del secondo; lo sono?) sono

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial X} = p_X - \lambda Y = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial Y} = p_Y - \lambda X = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = XY - \bar{U} = 0$$

Dalle prime due condizioni otteniamo (dividendo la prima per la seconda)

$$\frac{p_X}{p_Y} = \frac{Y}{X}$$

Risolvendo per *Y* e sostituendo nella terza condizione otteniamo

$$X_H = \left(\frac{p_Y}{p_X}\bar{U}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e ripetendo la stessa operazione per trovare *Y* otteniamo

$$Y_H = \left(\frac{p_X}{p_Y}\bar{U}\right)^{\frac{1}{2}}$$

In entrambi casi il pedice *H* indica il fatto che la domanda così ottenuta è la **domanda Hicksiana**, dal nome di un illustre economista da tempo scomparso (Sir John Hicks di Oxford[3], premio Nobel per l'Economia nel 1972), detta

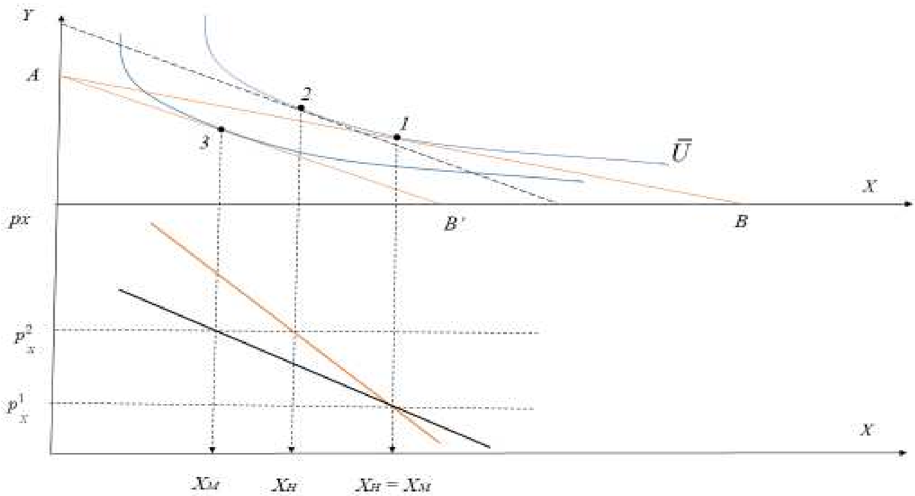
[2] In questa dispensa i vincoli saranno espressi (quasi) sempre in termini di uguaglianza.

[3] Sir John Hicks insegnò inizialmente in università inglesi minori, ma nel 1946 ritornò a lavorare definitivamente a Oxford, prima come *Research Fellow* al *Nuffield College* (1946-1965), quindi come *Drummond Professor of Political Economy* (1952-1965) e infine come *Research Fellow* all'*All Souls College* (1965-1971). Fondamentali sono i suoi contributi alla teoria dell'utilità e dei confronti interpersonali delle variazioni di benessere.

anche **compensata**. Essa indica la *corrispondenza* tra quantità e prezzo/i che mantiene il consumatore sul livello di utilità assegnato. In generale, con N merci consumate, la domanda compensata per una qualsiasi X è

$$X_H\left(\boldsymbol{p};\bar{U}\right).$$

Esercizio. Supponendo di partire dal punto 1 sul v. b. AB della figura e ipotizzando un successivo aumento del prezzo di X, dire quale delle due domande inverse della parte inferiore del grafico è la domanda compensata nel senso di Hicks, quale è la domanda ordinaria o marshalliana e perché le due domande non coincidono in un nuovo punto comune. Qual è graficamente l'effetto di sostituzione? Qual è l'effetto di reddito? Il grafico chiarisce di più perché la domanda Hicksiana si chiama "compensata"? (Pensare a cosa determina lo spostamento da 1 a 2)



Per un'altra nozione di domanda compensata (e di effetto di sostituzione), vedere Gravelle-Rees, Capitolo 2 parte D.

SINTESI

La domanda Hicksiana o domanda **compensata** è definibile come quella funzione che associa ad ogni insieme di prezzi e al livello di utilità fissato uno *specifico* paniere di consumo. Quale? Esattamente *quello* che minimizza la spesa necessaria al consumatore per raggiungere *quel* dato livello di utilità fissato. In termini formali si ha:

$$H_i(\boldsymbol{p};\bar{U}) =$$

$$\arg\min_{H_1,H_2,\dots,H_N} \sum_{i=1}^{N} p_i H_i(\boldsymbol{p};\bar{U}) \middle| U\left(H_1(\boldsymbol{p};\bar{U}),\dots,H_N(\boldsymbol{p};\bar{U})\right) \geq \bar{U} \quad \forall i \in N$$

dove H_i è appunto una domanda Hicksiana del bene i e $U(.)$ la funzione di utilità diretta e $\bar{U}$ è il livello fissato di utilità. La domanda Hicksiana è dunque il termine *minimizzatore* nel problema di minimizzazione della spesa, ovvero nel problema di minimo vincolato che rappresenta il *duale* di quello di massimizzazione dell'utilità individuale dato il vincolo di bilancio, il cui *massimizzatore* è la domanda ordinaria (vedi).

Diciamo in generale che la $H_i(\boldsymbol{p},\bar{U})$ definisce una corrispondenza. Essa definisce invece una funzione se il sistema di preferenze è convesso e la funzione di utilità è quasi concava (che vuol dire anche concava; non vale il viceversa); in questo caso l'insieme delle funzioni $H_i(\boldsymbol{p},\bar{U})$ è un insieme convesso; se infine il sistema di preferenze è strettamente convesso, ogni $H_i(\boldsymbol{p},\bar{U})$ è unica e la domanda Hicksiana è una funzione. È questo il caso della funzione $U = XY$ studiata?

Verifica di alcune proprietà

Ogni domanda compensata è, tra l'altro,

1) **continua e monotona** in tutti gli argomenti (verificarlo per esercizio)
2) **omogenea di grado zero nei prezzi**;

Infatti, usando il Teorema di Eulero (vedi Note su Funzioni positivamente Omogenee) otteniamo:

$$\left[\frac{\partial}{\partial p_X}\left(\frac{p_Y}{p_X}\bar{U}\right)^{\frac{1}{2}}\right]p_X+\left[\frac{\partial}{\partial p_Y}\left(\frac{p_Y}{p_X}\bar{U}\right)^{\frac{1}{2}}\right]p_Y$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{p_Y}{p_X}\bar{U}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{p_Y}{p_X^2}\bar{U}\right)\right)p_X+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{p_Y}{p_X}\bar{U}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{p_X}\bar{U}\right)p_Y$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{p_Y}{p_X}\bar{U}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{p_Y}{p_X}\right)-\left(\frac{p_Y}{p_X}\right)\right]=0=\underbrace{0}_{\substack{\text{Grado di}\\\text{omogeneità}}}\times\left[\underbrace{\left(\frac{p_Y}{p_X}\bar{U}\right)^{\frac{1}{2}}}_{\substack{\text{Funzione originaria}\\\text{di domanda}}}\right]=0$$

3) **verificare se essa è concava o convessa del suo prezzo**
4) **verificare se essa è non decrescente nell'utilità**

Secondo obiettivo: dalla domanda compensata alla Funzione di Spesa.

Quale è l'importo minimo che dobbiamo spendere per ottenere, dati i prezzi, il livello di utilità fissato? Sostituiamo le due domande compensate ottenute in precedenza nel vincolo di bilancio e otteniamo un nuova funzione che chiamiamo la **funzione di spesa**, che ha per argomenti i prezzi e l'utilità, $e(p_X, p_Y, \bar{U})$:

$$e(p_X, p_Y, \bar{U}) = p_X\left(\frac{p_Y}{p_X}\bar{U}\right)^{\frac{1}{2}} + p_Y\left(\frac{p_X}{p_Y}\bar{U}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2\left(p_X p_Y \bar{U}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Essa indica **la spesa minima necessaria per ottenere quel livello di utilità** $\bar{U} > 0$ dal quale siamo partiti come vincolo al comportamento.

SINTESI

La **funzione di spesa** di un consumatore è definibile come quella funzione che dato un insieme di prezzi dei beni **associa ad ogni dato livello di utilità a cui aspira il consumatore l'esborso minimo complessivo** (spesa) necessario per il suo ottenimento. In termini formali si ha:

$$e(\boldsymbol{p};U) = \min_{x_1, x_2, \ldots, x_N}\left\{\sum\nolimits_{i=1}^{N} p_i x_i(\boldsymbol{p};R) \middle| U\left(x_1(\boldsymbol{p};R), \ldots, x_N(\boldsymbol{p};R)\right) \geq \bar{U}\right\} \ \forall \boldsymbol{i} \in N$$

dove x_i è appunto la domanda ordinaria del bene i e $U(.)$ la funzione di utilità diretta e $\bar{U}$ è il livello fissato di utilità. La funzione di spesa è dunque una funzione di **minimo valore** del problema di minimizzazione vincolata della spesa. Tale problema di minimizzazione vincolata rappresenta il problema *duale* di quello di massimizzazione dell'utilità dato il vincolo costituito dalle risorse spendibili, la cui funzione (di massimo) valore sarà la funzione di utilità indiretta.

Proprietà

1) È continua nei prezzi e nel livello di utilità (intuitivo ma verificarlo per esercizio)
2) È strettamente crescente in $\bar{U}$ e non decrescente in ogni p_i di $\mathbf{p}$
3) È concava **nei prezzi**[4]. Vediamolo nel nostro caso con riferimento a p_X

$$\frac{\partial}{\partial p_X}\left[e(p_X, p_Y, \bar{U})\right] = \left(p_X p_Y \bar{U}\right)^{-\frac{1}{2}} p_Y \bar{U} > 0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial p_X^2}\left[e(p_X, p_Y, \bar{U})\right] = -\frac{1}{2}\left(p_X p_Y \bar{U}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(p_Y \bar{U}\right)^2 < 0$$

[4] Si può anche vedere che è quasi concava poiché $H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left(p_X p_Y \bar{U}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(p_Y \bar{U}\right)^2 & \frac{\bar{U}}{2(p_X p_Y \bar{U})^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{\bar{U}}{2(p_X p_Y \bar{U})^{\frac{1}{2}}} & -\frac{\left(p_X^2 \bar{U}^2\right)}{2(p_X p_Y \bar{U})^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}$ è negativa semi definita.

4) È omogenea di grado 1 **nei prezzi**. Verifichiamolo con il Teorema di Eulero (vedi Note su Funzioni positivamente Omogenee). Deve essere

$$\left\{\frac{\partial}{\partial p_X}\left[e(p_X, p_Y, \bar{U})\right]\right\} p_X + \left\{\frac{\partial}{\partial p_Y}\left[e(p_X, p_Y, \bar{U})\right]\right\} p_Y = 1 \times e(p_X, p_Y, \bar{U})$$

Ed è proprio così. Infatti, derivando

$$\left[\left(p_X p_Y \bar{U}\right)^{-\frac{1}{2}} p_Y \bar{U}\right] p_X + \left[\left(p_X p_Y \bar{U}\right)^{-\frac{1}{2}} p_X \bar{U}\right] p_Y = 2\left(p_X p_Y \bar{U}\right)^{\frac{1}{2}} = \underbrace{1}_{\substack{\text{Grado di}\\ \text{omogeneità}}} \times \left[\underbrace{2\left(p_X p_Y \bar{U}\right)^{\frac{1}{2}}}_{\substack{\text{Funzione originaria}\\ \text{di Spesa}}}\right]$$

5) La sua derivata prima rispetto al prezzo di una merce corrisponde alla domanda compensata di tale merce

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_X}\left[e(p_X, p_Y, \bar{U})\right] &= \left(p_X p_Y \bar{U}\right)^{-\frac{1}{2}} p_Y \bar{U} \\ &= \left(\frac{1}{p_X p_Y \bar{U}}\right)^{\frac{1}{2}} p_Y \bar{U} \\ &= \left(\frac{p_Y}{p_X}\bar{U}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= X_H^*\end{aligned}$$

Da ciò ricaviamo nuovamente che la domanda compensata è omogenea di grado 0 nei prezzi (come mai?).

Ripetere la stessa derivazione per p_Y.

2. Le domande ordinarie e l'utilità indiretta.

Torniamo al problema iniziale, modificandolo in maniera "tradizionale". Sia nuovamente $f : R_{++}^2 \rightarrow R$ di classe C^2 che rappresenta un funzione di utilità $U = XY$ sullo stesso dominio di prima. Supponiamo nuovamente che Tizia/o disponga di un importo spendibile R da distribuire sui 2 beni, dati i loro prezzi. Tizia/o vuole massimizzare l'utilità rispettando (strettamente) un vincolo sul livello di spesa che deve essere pari a R. Siamo quindi interessati alla ricerca delle condizioni per il massimo di benessere rispetto a X e a Y vincolato da R e dai prezzi, che generi una domanda che dipende proprio da R e dai prezzi. Sappiamo dal corso base che il massimo lo troveremo risolvendo il seguente problema

$$Max_{X,Y}\ XY\ s.v.\ p_X X + p_Y Y = R$$

La funzione Lagrangiana è

$$\Lambda = XY + \lambda\left[R - p_X X - p_Y Y\right]$$

e le condizioni del primo ordine (supponendo soddisfatte quelle del secondo; farlo per esercizio se fa piacere…) sono

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial X} = Y - \lambda p_X = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial Y} = X - \lambda p_Y = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = R - p_X X - p_Y Y = 0$$

Ovvero

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_X \\ 0 & 1 & -p_Y \\ -p_Y & -p_X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è pari a $\Delta = -2 p_X p_Y \neq 0$ e quindi

$$Y_M^* = \frac{\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -p_X \\ 0 & 1 & -p_Y \\ -R & -p_X & 0 \end{Vmatrix}}{\Delta} = \frac{-Rp_X}{-2 p_X p_Y} = \frac{R}{2p_Y}$$

$$X_M^* = \frac{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -p_X \\ 0 & 0 & -p_Y \\ -p_Y & -R & 0 \end{Vmatrix}}{\Delta} = \frac{-Rp_Y}{-2 p_X p_Y} = \frac{R}{2p_X}$$

$$\lambda^* = \frac{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -p_Y & -p_X & -R \end{Vmatrix}}{\Delta} = \frac{-R}{-2 p_X p_Y} = \frac{R}{2 p_X p_Y}$$

Le domande così ottenute esprimono la quantità in relazione a R e ai prezzi e prendono il nome di domande ordinarie o marshalliane (perciò il pedice M), dal nome di un defunto signore inglese (Mr. Alfred *Freddy* Marshall) già residente nella ridente cittadina turistica inglese di Cambridge, a Nord-Est di Londra.

SINTESI

La funzione di **domanda ordinaria** di un consumatore è definibile come quella funzione (o corrispondenza) che associa ad ogni insieme di prezzi dei beni e all'Importo Spendibile Individuale (alcuni, a torto, lo chiamano reddito; noi lo indicheremo solo *R*), il paniere di consumo che massimizza l'utilità del consumatore, sotto il vincolo che la sua spesa complessiva non ecceda *R* (per noi però il vincolo opererà solo nella versione in cui la spesa sia uguale a *R*). In termini formali si ha:

$$M_i(\boldsymbol{p},R)=\arg\max_{x_1,\dots,x_N}\left\{U\left(M_1,\dots,M_N\right)\middle|\sum_{i=1}^{N}p_iM_i(\boldsymbol{p},R)\le R\right\}\ \forall i\in N$$

dove M_i è appunto la domanda marshalliana del bene i e $U(.)$ è la funzione di utilità.

La domanda ordinaria è dunque il *massimizzatore* nel problema di massimizzazione dell'utilità individuale; problema di massimo vincolato che rappresenta il *duale* di quello di minimizzazione della spesa dato il vincolo costituito dall'utilità minima ottenibile, il cui *minimizzatore* è la domanda compensata o Hicksiana (vedi sopra).

Esercizio

Usando un normale grafico con curve di indifferenza convesse definite su 2 beni e l'usuale vincolo di bilancio mostrare che **le condizioni** per la massimizzazione dell'utilità dato il vincolo *R* e per la minimizzazione della spesa dato un livello di utilità coincidono.

Proprietà delle domande ordinarie

1) Sono omogenee di grado 0 nei prezzi e in *R*, così come le domande compensate lo erano nei prezzi. (si dice: Il consumatore non soffre di c.d. illusione monetaria: se raddoppiano i prezzi ed *R* la domanda non cambia). Applicando Eulero:

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\partial}{\partial p_X}\left[\frac{R}{2p_X}\right]\right\}p_X+\left\{\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{R}{2p_X}\right]\right\}R&=\left(-\frac{R}{2}p_X^{-2}\right)p_X+\left(\frac{1}{2p_X}\right)R\\&=-\frac{R}{2}p_X^{-1}+\frac{R}{2p_X}\\&=0\\&=\underbrace{0}_{\substack{\text{Grado di}\\\text{omogeneità}}}\times\underbrace{\frac{R}{2p_X}}_{\substack{\text{Funzione originaria}\\\text{di domanda}}}\end{aligned}$$

Sfruttando la proprietà di omogeneità di grado zero ricaviamo che la somma delle elasticità ai prezzi e al reddito è nulla. Infatti, se la domanda

$x(p_X, p_Y; R)$

è omogenea di grado zero in R e p_X e p_Y per il Teorema di Eulero vale che

$$\frac{dx(R,p_X,p_Y)}{dp_X}p_X+\frac{dx(R,p_X,p_Y)}{dp_Y}p_Y+\frac{dx(R,p_X,p_Y)}{dR}R=0$$

Allora, dividendo ogni termine per X, otteniamo (ricordando la formula dell'elasticità)

$$\frac{dx(R,p_X,p_Y)}{dp_X}\frac{p_X}{X}+\frac{dx(R,p_X,p_Y)}{dp_Y}\frac{p_Y}{X}+\frac{dx(R,p_X,p_Y)}{dR}\frac{R}{X}=0$$

ovvero

$$\eta^x_{p_X}+\eta^x_{p_Y}+\eta^x_R=0$$

Esempio. Sia

$$x(R,p_X,p_Y)=\frac{Rp_Y}{p_X^2}$$

È facile ricavare che

$$\eta^x_{p_X}+\eta^x_{p_Y}+\eta^x_R=-2+1+1=0.$$

Interpretare.

2) Le domande ordinarie rispettano il risultato del 1942 di Roy (noto come identità di Roy) (dal nome di un defunto ingegnere ed importante economista francese[5]) per il quale ciascuna domanda ordinaria corrisponde al rapporto tra derivate parziali rispetto al prezzo e ad R nella funzione di utilità indiretta, così come segue

[5] Purtroppo la vita di René Roy (1894 – 1977) fu travagliata da disgrazie e incidenti. Rimase cieco all'età di 23 anni. Ciononostante, grazie ad una forte volontà e ad una solida formazione matematica, riuscì a pubblicare nel 1942 il risultato che utilizziamo nel testo. Roy appartiene ad un ampio gruppo di ingegneri **francesi** diventati anche importanti e accreditati economisti.

$$\frac{R}{2p_X} = -\left[\frac{v(R,p_X,p_Y)/\partial p_X}{v(R,p_X,p_Y)/\partial R}\right] = -\left[\frac{\partial\left[\frac{R^2}{4}(p_X p_Y)^{-1}\right]/\partial p_X}{\partial\left[\frac{R^2}{4}(p_X p_Y)^{-1}\right]/\partial R}\right]$$

$$= -\left[\frac{-\frac{R}{4}\frac{p_X}{p_Y}}{\frac{2R}{4}p_X p_Y}\right]$$

$$= \frac{R}{2p_X}$$

Analoga relazione esiste per Y_M. (verificarla).

3) Aggregazione di Engel. Per la domanda marshalliana *X(**p**, R)* vale la seguente restrizione

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial R}p_i = 1$$

Con $n = 2$ ricaviamo la restrizione come segue. Dato il vincolo alla spesa usuale gli sostituiamo le funzioni di domanda marshalliane ottenute dalla massimizzazione vincolata dell'utilità

$$R = p_X X(\boldsymbol{p},R) + p_Y Y(\boldsymbol{p},R)$$

Derivando rispetto a R otteniamo

$$1 = p_X\frac{\partial X(\boldsymbol{p},R)}{\partial R} + p_Y\frac{\partial Y(\boldsymbol{p},R)}{\partial R}$$

$$= \left[\underbrace{\frac{p_X X(\boldsymbol{p},R)}{R}}_{S_X}\right]\left(\underbrace{\frac{\partial X(\boldsymbol{p},R)}{\partial R}\frac{R}{X(\boldsymbol{p},R)}}_{\eta_R^X}\right) + \left[\underbrace{\frac{p_Y Y(\boldsymbol{p},R)}{R}}_{S_Y}\right]\left(\underbrace{\frac{\partial Y(\boldsymbol{p},R)}{\partial R}\frac{R}{Y(\boldsymbol{p},R)}}_{\eta_R^Y}\right)$$

$$= S_X\eta_R^X + S_Y\eta_R^Y$$

Allora

$$S_X \equiv \frac{p_X X(\boldsymbol{p},R)}{R} = \frac{1-S_Y\eta_R^Y}{\eta_R^X}$$

Quindi il risultato che si otterrebbe guardando **al solo vincolo di bilancio prima della derivazione delle domande marshalliane ottime** ovvero che la somma delle quote di spesa è pari a 1:

$$1=\frac{p_X X}{R}+\frac{p_Y Y}{R}$$

vale anche dopo la scelta "ottima" che massimizza l'utilità **solo** se le due elasticità al reddito si "compensano" tra loro. Ciò si vede molto chiaramente nella versione semplice

$$1=\underbrace{S_X}_{+}\underbrace{\eta_R^X}_{?}+\underbrace{S_Y}_{+}\underbrace{\eta_R^Y}_{?}$$

Perché la somma dia un numero positivo (1) occorre che almeno una elasticità al reddito sia positiva. Quindi la somma a 1 delle quote (valutate con le domande marshalliane) richiede che almeno uno dei due beni consumati sia "**normale**" (elasticità positiva a *R*).
In generale l'aggregazione di Engel permette di scrivere

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial R}p_i=1=\sum_{i=1}^{n}S_i\eta_R^{X_i}$$

4) Aggregazione di Cournot. L'effetto incrociato che la variazione del prezzo di *X* ha su *Y* è limitato dalla presenza del vincolo di bilancio.

Con n = 2 ricaviamo la restrizione come segue. Dato il vincolo alla spesa usuale, sostituiamo le funzioni di domanda marshalliane ottenute dalla massimizzazione vincolata dell'utilità:

$$R = p_X X(\boldsymbol{p},R)+p_Y Y(\boldsymbol{p},R)$$

Derivando R rispetto a p_X otteniamo

$0=p_X\dfrac{\partial X(\boldsymbol{p},R)}{\partial p_X}+X(\boldsymbol{p},R)+p_Y\dfrac{\partial Y(\boldsymbol{p},R)}{\partial p_X}$. Se moltiplichiamo ogni termine per $\dfrac{X(\boldsymbol{p},R)}{R}\dfrac{p_X}{X(\boldsymbol{p},R)}$:

$$0=p_X\frac{\partial X(\boldsymbol{p},R)}{\partial p_X}[\frac{X(\boldsymbol{p},R)}{R}\frac{p_X}{X(\boldsymbol{p},R)}]+X(\boldsymbol{p},R)[\frac{X(\boldsymbol{p},R)}{R}\frac{p_X}{X(\boldsymbol{p},R)}]+p_Y\frac{\partial Y(\boldsymbol{p},R)}{\partial p_X}[\frac{X(\boldsymbol{p},R)}{R}\frac{p_X}{X(\boldsymbol{p},R)}\frac{Y(\boldsymbol{p},R)}{Y(\boldsymbol{p},R)}]$$

$$=\left[\underbrace{\frac{p_X X(\boldsymbol{p},R)}{R}}_{S_X}\right]\left(\underbrace{\frac{\partial X(\boldsymbol{p},R)}{\partial p_X}\frac{p_X}{X(\boldsymbol{p},R)}}_{\eta_{pX}^X}\right)+\left[\underbrace{\frac{p_Y Y(\boldsymbol{p},R)}{R}}_{S_Y}\right]\left(\underbrace{\frac{\partial Y(\boldsymbol{p},R)}{\partial p_X}\frac{p_X}{Y}}_{\eta_{pX}^Y}\right)+\left[\underbrace{\frac{p_X X(\boldsymbol{p},R)}{R}}_{S_X}\right]$$

Allora

$$S_X \equiv \frac{p_X X(\boldsymbol{p},R)}{R} = -\left(\frac{S_Y \eta^Y_{p_X}}{(1+\eta^X_{p_X})}\right) \text{quando } \eta^Y_{p_X} \neq 0$$

Se invece $\eta^Y_{p_X} = 0$ (caso C-D) il risultato implica $S_X \eta^X_{p_X} = -S_X$ che è soddisfatta se $\eta^X_{p_X} = -1$ che è proprio il caso di funzioni di domanda generate da preferenze C-D.

In sintesi, con n domande ed n prezzi per domanda, data ogni domanda X_i continua, monotona, omogenea di grado zero e simmetrica, per cui vale l'aggregazione di Engel, **valgono le seguenti proprietà**

1) Adding Up, ovvero le shares "contabili" sommano a 1

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = 1$$

2) Aggregazione di Engel

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i(\boldsymbol{p},R)}{\partial R} p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i(\boldsymbol{p},R)}{\partial R} p_i \left(\frac{R}{R}\frac{X_i}{X_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \eta^{X_i}_R S_i = 1$$

La variazione ponderata media del consumo indotta da una variazione di R corrisponde esattamente alla variazione di R.
Ci serve? Si: **Nei lavori applicati potrebbe essere più facile stimare alcune elasticità al reddito piuttosto che altre (che ci ricaviamo da quelle stimate date le shares**)

3) Aggregazione di Cournot

$$\left[\underbrace{\frac{p_X X(\boldsymbol{p},R)}{R}}_{S_X}\right]\left(\underbrace{\frac{\partial X(\boldsymbol{p},R)}{\partial p_X}\frac{p_X}{X(\boldsymbol{p},R)}}_{\eta^X_{p_X}}\right) + \left[\underbrace{\frac{p_Y Y(\boldsymbol{p},R)}{R}}_{S_Y}\right]\left(\underbrace{\frac{\partial Y(\boldsymbol{p},R)}{\partial p_X}\frac{p_X}{Y}}_{\eta^Y_{p_X}}\right) = -\left[\underbrace{\frac{p_X X(\boldsymbol{p},R)}{R}}_{S_X}\right]$$

ovvero per n domande

$$\sum_{j=1}^{n} S_j \eta^{X_j}_{p_i} = -S_i \quad \forall i, j \in n$$

La media ponderata dell'effetto indotto da una variazione di p_X sul consumo **di tutti i beni** dipende dalla quota della spesa per X.
Ci serve? Si: **Nei lavori applicati potremmo già disporre di informazioni sull'elasticità al prezzo della domanda di alcuni beni e ricavare le altre senza procedere a stime, date le shares.**

Utilità di 2) + 3)

The Engel aggregation means that not all goods are luxuries ($\eta_R > 1$), or necessities ($\eta_R < 1$), or inferior goods ($\eta_R < 0$).
The Cournot aggregation says that the budget share *Sj* of the good j is small when the good j has many substitutes ($\eta_{ij} > 0$), and big when it has many complements ($\eta_{ij} < 0$), or their respective budget shares are large.

4) Conseguenza dell'omogeneità di grado 0 della domanda

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial X_i}{\partial p_j} p_j + \frac{\partial X_i}{\partial p_i} p_i = 0$$

da cui

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial X_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{X_i} + \frac{\partial X_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{X_i} = 0$$

ovvero

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \eta_{p_j}^{X_i}}_{\text{Somma delle elasticità incrociate}} = - \underbrace{\eta_{p_i}^{X_i}}_{\text{Elasticità al proprio prezzo}}$$

5) Simmetria:

$$S_i\left(\eta_{ij} + S_j \eta_i\right) = S_j\left(\eta_{ji} + S_i \eta_j\right) \;\; \forall i \neq j \in n$$

Esercizio

a) Sia la seguente funzione di spesa $e(p_X, p_Y, \bar{U}) = p_X^{0.25} p_Y^{b} \bar{U}$: Che valore deve avere *b*?
b) Siano $p_X = p_Y = 2$ e $R = 24$. Dato il *b* trovato sopra, quante unità di *X* consumerà l'individuo per max l'utilità? Tenere presente che quando l'utilità è massima la domanda compensata e quella ordinaria coincidono per il valore di *R* che minimizza la spesa necessaria a raggiungere l'utilità cercata. Aiutarsi con le relazioni di dualità che seguono. Tutte queste cose verranno trattare per esteso a lezione.
c) (Non svolto) Sia la funzione di utilità C-D: $U = X^{\alpha} Y^{\beta}$ con $\alpha + \beta = 1$.

Mostrare che:

$\eta_{p_X}^X = \eta_{p_Y}^Y = -1; \eta_{p_Y}^X = \eta_{p_X}^Y = 0; \; \eta_R^X = \eta_R^Y = 1$;

$\eta_{p_X}^X + \eta_{p_Y}^X + \eta_R^X = 0$ e interpretare dal punto di vista dell'omogeneità;

$S_X \eta_R^X + S_Y \eta_R^Y + \eta_R^X = \alpha + \beta = 1$ e interpretare dal punto di vista dell'aggregazione di Engel

$S_X \eta_{p_X}^X + S_Y \eta_{p_Y}^Y = -\alpha = -S_X$ e interpretare dal punto di vista dell'aggregazione di Cournot

Punto a. L'esponente *b* deve essere pari a 1 – 0.25 = 0.75 perché la somma degli esponenti di una funzione omogenea di grado 1 deve *essere pari a 1.* Verificare anche con il Teorema di Eulero.

Punto b. Ricordiamo che all'ottimo

$$e(p_X, p_Y, \bar{U}) = R$$

e che

$$\frac{\partial}{\partial p_x} e(p_X, p_Y, \bar{U}) = X^*.$$

Usando i dati otteniamo $p_X^{0.25} p_Y^{0.75} \bar{U} = 2\bar{U} = 24$ e quindi il livello di utilità massimo data la spesa è 12 e che

$$\frac{\partial}{\partial p_X} e(p_X, p_Y, \bar{U}) = 0.25\left(\frac{p_X}{p_Y}\right)^{0.75} \bar{U} = 0.25\left(\frac{2}{2}\right)^{0.75} 12 = 3 = X^*$$

Quindi il livello di utilità massimo data la spesa è 12 e le unità di X cercate sono 3.
Sostituendo le domande ordinarie in $U = XY$ otteniamo

$$v(R, p_X, p_Y) = \left(\frac{R}{2p_X}\right)\left(\frac{R}{2p_Y}\right) = \frac{R^2}{4}(p_X p_Y)^{-1}$$

La funzione esprime il livello di utilità quale funzione di massimo valore dell'utilità ordinaria, dato R e i prezzi. Prende il nome di funzione di **utilità indiretta**, e ne tratteremo più avanti.

3. La funzione Λ* e il moltiplicatore

Approfondiamo il risultato relativo al valore ottimo del moltiplicatore nell'esempio precedente. Se riscriviamo la precedente lagrangiana utilizzando i valori ottimi di X, Y e λ trovati in precedenza otteniamo

$$\Lambda^* = U^*(X^*(p_X, p_Y, R), Y^*(p_X, p_Y, R)) + \lambda^*(p_X, p_Y, R)\left[R - p_X X^*(p_X, p_Y, R) - p_Y Y^*(p_X, p_Y, R)\right]$$

Chiamiamo

$$V(p_X, p_Y, R) = U^*(X^*(p_X, p_Y, R), Y^*(p_X, p_Y, R))$$

funzione di (massimo) valore dell'utilità. Essa dà il massimo valore raggiunto dalla funzione da massimizzare espresso solo in funzione del parametro R da cui dipende in modo continuo. Ovviamente

$$V(R) = v(R, p_X, p_Y)$$

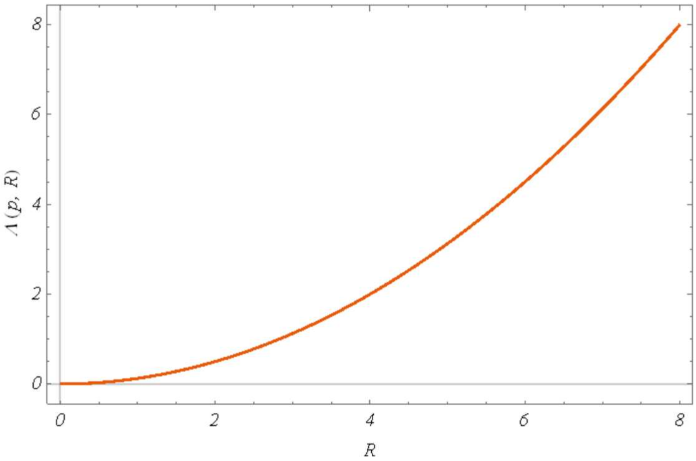
e quindi

$$\frac{\partial V(R,p_X,p_Y)}{\partial R}=\frac{\partial \Lambda^*}{\partial R}=\frac{R}{2p_X p_Y}=\lambda^*$$

con

$$\frac{\partial^2 \Lambda^*}{\partial R^2}=\frac{\partial \lambda^*}{\partial R}=\frac{1}{2p_X p_Y}>0.$$

La funzione del massimo valore ottenuta dalla **specifica** funzione di utilità vincolata è convessa in *R*. Ciò vuol dire, **nel caso in questione**, che se un consumatore ha raggiunto la massima utilità dato il vincolo, un aumento di *R* le/gli aumenterà il valore massimo dell'utilità più che proporzionalmente. Ottenere un aumento di R quando R è già alto genera quindi un incremento dell'utilità massima maggiore rispetto al caso in cui lo stesso aumento di R lo si ottenesse partendo da un R minore. In altre parole, nel caso in questione e a parità di $dR > 0$, i ricchi possono incrementare marginalmente di più la loro utilità massima rispetto ai poveri perché la funzione del massimo valore Λ^* è convessa in *R*. Il grafico seguente rappresenta la funzione del massimo valore ricavata in precedenza per valori dati dei prezzi.



Naturalmente questo risultato dipende dalla forma funzionale dell'utilità. Gli esercizi che seguono trattano altre funzioni di utilità. In generale si può dimostrare che:
a) se il grado di omogeneità della funzione di utilità di partenza è > 1 la funzione del massimo valore è convessa in R;
b) se il grado di omogeneità della funzione di utilità è < 1 la funzione del massimo valore è concava in R;
c) se il grado di omogeneità della funzione di utilità è = 1 (C-D classica) la funzione del massimo valore è lineare in R.

Infine il risultato di Roy può riformularsi come segue

$$-\left[\frac{\partial v(R,p_X,p_Y)}{\partial p_X}\right]/\,\lambda^*=\frac{R}{2p_X}=X^M$$

E quindi

$$-\left[\frac{\partial v(R, p_X, p_Y)}{\partial p_X}\right] = \lambda^* X^M .$$

E' chiaro che se $\frac{\partial \lambda^*}{\partial R} = 0$, λ^* è costante e ciò equivale a dire che è costante l'effetto di reddito.

Esercizio

Supponendo una funzione di utilità Stone-Geary e una C-D "classica":

$$u = \gamma \ln(X - \overline{X}) + (1 - \gamma) \ln(Y - \overline{Y})$$
$$u = AX^{\alpha} Y^{1-\alpha}$$

ricavare le 2 funzioni Λ^* e valutare **se** esse sono convesse in R. Cercare di interpretare.

4 Il Teorema dell'Inviluppo

Quanto visto sopra

[DISPENSA A PARTE]

5. Relazioni tra domande compensate, funzione di spesa e utilità indiretta: una sintesi

Il seguente schema sintetizza le principali relazioni di "dualità" nella sfera del consumo in R^2. (le frecce indicano derivazione da o sostituzione in)

<table>
<tr><th>PROBLEMA DIRETTO</th><th>STESSO PROBLEMA IN FORMA "DUALE"</th></tr>
<tr><td>$Max_{x_1,x_2} U(x_1,x_2)$ s.v. $p_1x_1 + p_2x_2 = R$</td><td>$Min_{x_1,x_2} p_1x_1 + p_2x_2 = R$ s.v. $U(x_1,x_2) = \bar{U}$</td></tr>
<tr><td>$\Lambda = U(x_1,x_2) - \lambda\left[p_1x_1 + p_2x_2 - R\right]$</td><td>$\Lambda = p_1x_1 + p_2x_2 - \lambda\left[U(x_1,x_2) - \bar{U}\right]$</td></tr>
<tr><td>$x_1^* = x_1(p_1, p_2, R)$
$x_2^* = x_2(p_1, p_2, R)$
Domande c.d. ordinarie</td><td>$h_1 = h_1(p_1, p_2, \bar{U})$
$h_2 = h_2(p_1, p_2, \bar{U})$
Domande c.d. compensate</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\searrow \quad \dfrac{\partial x_i}{\partial p_j} = \dfrac{\partial h_i}{\partial p_j} - \dfrac{\partial x_i}{\partial R} x_j \quad \swarrow$
Equazione di Slutsky con i uguale o diverso da j</td></tr>
<tr><td>Sostituendo in $U(x_1, x_2)$

le domande Marshalliane

$U(x_1^*, x_2^*) = v(p_1, p_2, R)$

utilità indiretta</td><td>Sostituendo in $p_1x_1 + p_2x_2$

le domande compensate

$e(p_1, p_2, \bar{U})$

funzione di spesa</td></tr>
<tr><td colspan="2">In equilibrio:

$R = e$
$\leftrightarrow$
$v = \bar{U}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">DOMANDE

Roy   Shepard (Adattamento)

$-\dfrac{\partial v(p_1,p_2,R)/\partial p_1}{\partial v(p_1,p_2,R)/\partial R} = x_1^*(p_1, p_2, R)$ $\dfrac{\partial e(p_1,p_2,\bar{U})}{\partial p_1} = h_1(p_1, p_2, \bar{U})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">La funzione di utilità indiretta corrisponde in equilibrio all'inversa rispetto a U della funzione di spesa e viceversa la funzione di spesa corrisponde all'inversa rispetto a R dell'utilità indiretta</td></tr>
</table>

Pertanto, quale sintesi

In equilibrio $\qquad e(p_X, p_Y, \bar{U}) = R$

Inoltre, poichè

$$\underbrace{v\left(p_X, p_Y, \underbrace{e(p_X, p_Y, \bar{U})}_{\substack{\text{Spesa per il livello} \\ \bar{U} \text{ di utilità}}}\right)}_{\substack{\text{Funzione di utilità indiretta con una} \\ \text{spesa che genera il livello } \bar{U} \\ \text{di utilità}}} = \underbrace{\bar{U}}_{\text{Utilità diretta data}}$$

possiamo anche scrivere

$$\underbrace{e\left(p_X, p_Y, \underbrace{v\left(p_X, p_Y, \underbrace{e(p_X, p_Y, \bar{U})}_{\substack{\text{Spesa necessaria} \\ \text{a raggiungere il livello } \bar{U} \\ \text{di utilità}}}\right)}_{\substack{\text{Utilità indiretta} \\ \text{raggiungibile con la spesa necessaria} \\ \text{a raggiungere il livello } \bar{U} \\ \text{di utilità}}}\right)}_{\text{Funzione di Spesa}} = \underbrace{R}_{\substack{\text{Importo} \\ \text{spendibile}}}$$

4. L’equazione di Slutsky e la Matrice dei termini di sostituzione

Ricordando che nell’intorno dell’ottimo la domanda compensata e la domanda ordinaria coincidono e che R corrisponde alla funzione di spesa che consente di ottenere U^*, poniamo le due domande uguali tra loro:

$$X_j^M(\boldsymbol{p}, U^*) = X_j^M(\boldsymbol{p}, R) = X_j^M(\boldsymbol{p}, e(p, U^*))$$

Derivando rispetto al (suo) prezzo p_i

$$\frac{\partial X_j^H(\boldsymbol{p},U^*)}{\partial p_j}=\frac{\partial X_j^M(\boldsymbol{p},e(p,U^*))}{\partial p_j}+\frac{\partial X_j^M(\boldsymbol{p},e(p,U^*))}{\partial R}\underbrace{\frac{\partial e(p,U^*)}{\partial p_j}}_{\substack{=X_j^H(\boldsymbol{p},U^*)\\ =X_j^M(\boldsymbol{p},R)\\ \text{nell'intorno}\\ \text{dell'equilibrio}}}$$

Allora riaggiustando i termini

$$\underbrace{\frac{\partial X_j^M(\boldsymbol{p},U^*)}{\partial p_j}}_{\substack{\text{Variazione}\\ \text{domanda indotta}\\ \text{dalla variazione}\\ \text{del } \textbf{\textit{suo}} \text{ prezzo}}}=\underbrace{\frac{\partial X_j^H(\boldsymbol{p},e(p,U^*))}{\partial p_j}}_{\substack{\text{Componente della}\\ \text{Variazione della}\\ \text{domanda attribuibile}\\ \text{all'effetto di}\\ \textbf{\textit{Sostituzione}}\\ \textbf{\textit{diretto / proprio}}\\ S_{jj}}}-\underbrace{\frac{\partial X_j^M(\boldsymbol{p},e(p,U^*))}{\partial R}X_j^M(\boldsymbol{p},R)}_{\substack{\text{Componente della}\\ \text{Variazione della}\\ \text{domanda attribuibile}\\ \text{al c.d. effetto di}\\ \text{di } \textbf{\textit{Reddito}}\\ \boldsymbol{I}}}$$

Con riferimento alla variazione del prezzo dell'altro bene p_i, avremo

$$\underbrace{\frac{\partial X_j^M(\boldsymbol{p},e(p,U^*))}{\partial p_i}}_{\substack{\text{Variazione}\\ \text{domanda indotta}\\ \text{dalla variazione}\\ \text{dell'altro prezzo}}}=\underbrace{\frac{\partial X_j^H(\boldsymbol{p},U^*)}{\partial p_i}}_{\substack{\text{Componente della}\\ \text{Variazione della}\\ \text{domanda di } X_j \text{ attribuibile}\\ \text{all'effetto di}\\ \textbf{\textit{Sostituzione}}\\ \textbf{\textit{incrociato}}\\ S_{ji}}}-\underbrace{\frac{\partial X_j^M(\boldsymbol{p},e(p,U^*))}{\partial R}X_i^M(\boldsymbol{p},R)}_{\substack{\text{Componente della}\\ \text{Variazione della}\\ \text{domanda attribuibile}\\ \text{al c.d. effetto di}\\ \text{di } \textbf{\textit{Reddito}}\\ \boldsymbol{I}}}$$

S_{jj} indica la variazione della domanda Hicksiana di j, cioè quella variazione di quantità valutata mantenendo U^* costante grazie alla opportuna variazione compensatrice (della variazione del suo prezzo) imposta ad R (piovono soldi dal cielo grazie ad un sussidio non distorsivo del prezzo relativo; oppure, soldi che se ne vanno in cielo, per via di una tassa non distorsiva del prezzo relativo) in modo da riportare la somma spendibile a $e(p,U^*)$ iniziale.

S_{ji} indica la variazione della domanda Hicksiana di j, cioè quella variazione di quantità valutata mantenendo U^* costante grazie alla opportuna variazione compensatrice (della variazione del prezzo di X_i) imposta ad R (piovono soldi dal cielo grazie ad un sussidio non distorsivo del prezzo relativo; oppure, soldi che se ne vanno in cielo, per via di una tassa non distorsiva del prezzo relativo) in modo da riportare la somma spendibile a $e(p,U^*)$ iniziale.

OGNI EFFETTO DI SOSTITUZIONE ha segno inequivoco: sempre opposto a quello della variazione del prezzo. Si tenga presente che se p_j, ad esempio, aumenta, p_i diminuisce, relativamente a p_j. Quindi un aumento di p_i fa sempre aumentare la domanda di *Xj* **per la parte relativa ad S**.

I indica la variazione della domanda indotta dalla variazione di $e(p,U^*)$ provocata dalla variazione del prezzo (la componente X_i uguale alla derivata della funzione di spesa) per l'effetto che la variazione di $e(p,U^*)=R$ ha di suo sulla domanda.

EFFETTO DI REDDITO ha segno ambiguo poiché dipende dal segno di $\partial X_j^M(\boldsymbol{p},e(p,U^*))/\partial R$ (natura del bene j o del bene i: normale, inferiore, etc.).

La matrice dei termini di sostituzione di Slutsky

Iniziamo supponendo n = 2 e chiamiamo i beni X_1 e X_2. Le equazioni di Slutsky possibili sono 4:

$$\frac{\partial X_1^M(\boldsymbol{p},e(p,U^*))}{\partial p_1}=\frac{\partial X_1^H(\boldsymbol{p},U^*)}{\partial p_1}-\frac{\partial X_1^M(\boldsymbol{p},e(p,U^*))}{\partial R}X_1^M(\boldsymbol{p},R)$$
$$\frac{\partial X_1^M(\boldsymbol{p},e(p,U^*))}{\partial p_2}=\frac{\partial X_1^H(\boldsymbol{p},U^*)}{\partial p_2}-\frac{\partial X_1^M(\boldsymbol{p},e(p,U^*))}{\partial R}X_2^M(\boldsymbol{p},R)$$
$$\frac{\partial X_2^M(\boldsymbol{p},e(p,U^*))}{\partial p_1}=\frac{\partial X_2^H(\boldsymbol{p},U^*)}{\partial p_1}-\frac{\partial X_2^M(\boldsymbol{p},e(p,U^*))}{\partial R}X_1^M(\boldsymbol{p},R)$$
$$\frac{\partial X_2^M(\boldsymbol{p},e(p,U^*))}{\partial p_2}=\frac{\partial X_1^H(\boldsymbol{p},U^*)}{\partial p_2}-\frac{\partial X_2^M(\boldsymbol{p},e(p,U^*))}{\partial R}X_2^M(\boldsymbol{p},R)$$

Che riscriviamo in forma matriciale come

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial X_1^M}{\partial p_1} & \frac{\partial X_1^M}{\partial p_2}\\ \frac{\partial X_2^M}{\partial p_1} & \frac{\partial X_2^M}{\partial p_2}\end{bmatrix}}_{2\times 2}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial X_1^H}{\partial p_1} & \frac{\partial X_1^H}{\partial p_2}\\ \frac{\partial X_2^H}{\partial p_1} & \frac{\partial X_2^H}{\partial p_2}\end{bmatrix}}_{2\times 2}-\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial X_1^M}{\partial R}\\ \frac{\partial X_2^M}{\partial R}\end{bmatrix}}_{2\times 1}\underbrace{\begin{bmatrix}X_1 & X_2\end{bmatrix}}_{1\times 2}$$

La matrice dei termini di sostituzione di Slutsky è la **matrice delle derivate parziali delle domande compensate che corrispondono alle derivate seconde, dirette o incrociate, della funzione di spesa**. La indicheremo in questo modo:

$D_{\mathbf{p}}\mathbf{X}^H(\mathbf{p},U^*)$ oppure $D_{\mathbf{p}}\mathbf{X}^H(\mathbf{p},v(\mathbf{p},R)$ come preferite visto che le relazioni di dualità definite all'ottimo permettono di farlo.

Adesso passiamo in R^n:

RISULTATO FONDAMENTALE

Ipotesi:

a) esiste $U : R_+^n \rightarrow R$ continua, localmente non saturata e **strettamente quasi-concava**;
b) b) da a) è stata ricavata **la funzione** (non la corrispondenza) X^H ottimale (che prevede il mantenimento della massima utilità vincolata ottenibile) e che è continuamente derivabile in p e v.

Tesi:

1) La matrice di Slutsky corrisponde alla matrice Hessiana della funzione di spesa:

$$\boldsymbol{S} = D_{\boldsymbol{p}} H(\boldsymbol{p}, U^*) = D^2_{pp} e(\boldsymbol{p}, v(\boldsymbol{p}, R))$$

2) La matrice di Slutsky è **simmetrica e semi-definita negativa**

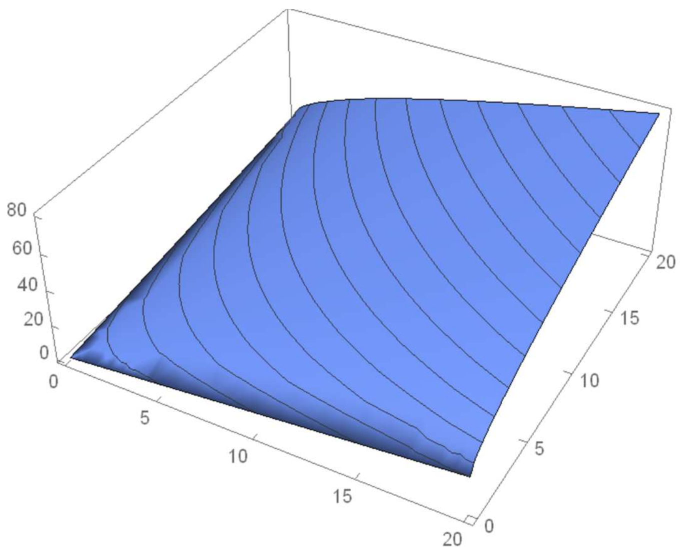
3) Dato il vettore riga dei prezzi $\boldsymbol{p}$

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}^T = \boldsymbol{0}$$

ESERCIZI

ESERCIZIO 1

Sia $U = \left(X^{0.5} + Y^{0.5} \right)^{\frac{1}{0.5}} : R_+^2 \rightarrow R$ di classe C^2 che rappresenta una funzione di utilità continua nel dominio $D \equiv [1, \infty] \times [1, \infty]$ e un vincolo di bilancio $p_X X + p_Y Y = R.$ Il grafico il seguente riproduce la funzione



Che possiamo dire delle curve di livello?
Valutiamo inizialmente se questa funzione (simile ad una CES con 0 < α < 1) è concava, convessa, quasi-concava …
La matrice Hessiana è

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2X} - \frac{(\sqrt{X}+\sqrt{Y})}{2X\sqrt{X}} & \frac{1}{2(\sqrt{XY})} \\ \frac{1}{2(\sqrt{XY})} & \frac{1}{2Y} - \frac{(\sqrt{X}+\sqrt{Y})}{2Y\sqrt{Y}} \end{bmatrix}$$

da cui

$$H_1 = \frac{1}{2X}\left(1 - \frac{(\sqrt{X}+\sqrt{Y}}{\sqrt{X}}\right) < 0$$

$$\| H_2 \| = 0$$

Nel contempo, gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 = -\frac{X^{3.5}Y^{1.5} - X^{1.5}Y^{3.5}}{2X^3Y^3} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{X}}{Y\sqrt{Y}} + \frac{\sqrt{Y}}{X\sqrt{X}}\right) < 0$$

Quindi *H* è semi definita negativa e la funzione è quasi concava.

Ricavare:

1) La domanda compensata dei 2 beni e studiarne il grado di omogeneità
2) La funzione di spesa
3) La domanda ordinaria (marshalliana) e studiarne il grado di omogeneità
4) La funzione di utilità indiretta e verificare cosa si ricava derivandola.

ESERCIZIO 2 Supponiamo che Tizia/o abbia le seguente funzione di utilità di classe C^2 vagamente del tipo Stone-Geary, monotona continua crescente nel dominio $\left[\bar{X}, \infty\right] \times \left[\bar{Y}, \infty\right]$ con $\bar{X} > 0$ $\bar{Y} > 0$:

$$U = \left(X - \bar{X}\right)^{\alpha} \left(Y - \bar{Y}\right)^{1-\alpha}$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$ e un vincolo di bilancio $p_X X + p_Y Y = R$.

Dopo aver interpretato il significato “economico” delle variabili con la barra sopra (consumo di sussistenza), ricavate:

1) La domanda compensata dei 2 beni e studiarne il grado di omogeneità
2) La funzione di spesa
3) La domanda ordinaria (marshalliana) dei 2 beni e studiarne il grado di omogeneità
4) La funzione di utilità indiretta e verificare il punto 3.

a) Domanda compensata

Siamo interessati alla ricerca di un minimo vincolato della spesa rispetto a *X* e a *Y* che generi una domanda che tenga conto di un vincolo sul livello di utilità. Sappiamo che lo troveremo risolvendo il seguente problema

$$Min_{X,Y}\left(p_X X + p_Y Y\right)\ s.v.\ \left(X - \bar{X}\right)^{\alpha}\left(Y - \bar{Y}\right)^{1-\alpha} = \bar{U}$$

La funzione Lagrangiana è

$$\Lambda = p_X X + p_Y Y - \lambda\left[\left(X - \bar{X}\right)^{\alpha}\left(Y - \bar{Y}\right)^{1-\alpha} - \bar{U}\right]$$

e le condizioni del primo ordine (supponendo soddisfatte quelle del secondo. Lo sono?) sono

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial X} = p_X - \lambda\left[\alpha\left(X - \bar{X}\right)^{\alpha-1}\left(Y - \bar{Y}\right)^{1-\alpha}\right] = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial Y} = p_Y - \lambda\left[(1-\alpha)\left(X - \bar{X}\right)^{\alpha}\left(Y - \bar{Y}\right)^{-\alpha}\right] = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = \left(X - \bar{X}\right)^{\alpha}\left(Y - \bar{Y}\right)^{1-\alpha} - \bar{U} = 0$$

Dalle prime delle due condizioni otteniamo (dividendo la prima per la seconda)

$$\frac{p_X}{p_Y} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}\frac{\left(Y - \bar{Y}\right)}{\left(X - \bar{X}\right)}$$

Risolvendo per *Y* e sostituendo nella terza condizione otteniamo

$$X_H = \bar{U}\left(\frac{\alpha p_Y}{(1-\alpha)p_X}\right)^{1-\varepsilon} + \bar{X}$$

e ripetendo la stessa operazione per *X* e sostituendo otteniamo

$$Y_H = \bar{U}\left(\frac{(1-\alpha)p_X}{\alpha p_Y}\right)^{\alpha} + \bar{Y}$$

In entrambi casi il pedice *H* indica il fatto che la domanda è Hicksiana. Essa indica la corrispondenza tra quantità e prezzo che mantiene il consumatore sullo stesso livello di utilità dato. Verificare che nel nostro esempio le due funzioni sono:

1) continue e monotone
2) omogenee di grado zero nei prezzi;

b) La funzione di spesa

Farlo per esercizio

c) La domanda ordinaria (marshalliana) dei 2 beni con studio del grado di omogeneità

Siamo interessati alla ricerca di un massimo di benessere rispetto a *X* e a *Y* vincolato dalla spesa e che generi una domanda che tenga conto di *R* e dei prezzi. Sappiamo che lo troveremo risolvendo il seguente problema

$$Max_{X,Y}\left[\left(X-\bar{X}\right)^{\alpha}\left(Y-\bar{Y}\right)^{1-\alpha}\right] \text{s.v. } p_X X + p_Y Y = R$$

La funzione Lagrangiana è

$$\Lambda = \left[\left(X-\bar{X}\right)^{\alpha}\left(Y-\bar{Y}\right)^{1-\alpha}\right] + \lambda\left[R - p_X X - p_Y Y\right]$$

e le condizioni del primo ordine (supponendo soddisfatte quelle del secondo; farlo per esercizio se fa piacere…) sono

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial X} = \alpha\left(X-\bar{X}\right)^{\alpha-1}\left(Y-\bar{Y}\right)^{1-\alpha} - \lambda p_X = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial Y} = (1-\alpha)\left(X-\bar{X}\right)^{\alpha}\left(Y-\bar{Y}\right)^{-\alpha} - \lambda p_Y = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = R - p_X X - p_Y Y = 0$$

Da cui l'eguaglianza tra *SMS* e prezzo relativo che otteniamo come nella derivazione di cui al punto precedente:

$$\frac{\alpha}{\left(1-\alpha\right)}\frac{\left(Y-\bar{Y}\right)}{\left(X-\bar{X}\right)} = \frac{p_X}{p_Y}$$

Impostiamo il sistema 2×2 usando l'espressione relativa al SMS di cui sopra e la terza condizione del primo ordine per calcolare[6] X e Y. Formiamo il sistema

$$\begin{cases} Y - \dfrac{p_X}{p_Y}\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)X = \bar{Y} - \dfrac{p_X}{p_Y}\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)\bar{X} \\ \\ p_Y Y + p_X X = R \end{cases}$$

Ovvero

$$\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{p_X}{p_Y}\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right) \\ p_Y & p_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} - \bar{X}\dfrac{p_X}{p_Y}\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right) \\ R \end{bmatrix}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è pari a

$$\Delta = p_X / \alpha \neq 0$$

e quindi il sistema non omogeneo può essere risolto invocando il teorema di Rouché-Capelli poiché il rango della matrice completa è pari al rango della matrice dei coefficienti (incompleta). Avendo $n = 2$ otterremo due soluzioni distinte:

$$\begin{aligned} Y_M^* &= \frac{\begin{Vmatrix} \bar{Y} - \bar{X}\dfrac{p_X}{p_Y}\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right) & -\dfrac{p_X}{p_Y}\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right) \\ R & p_X \end{Vmatrix}}{\Delta} = \frac{\left[p_X\left(\bar{Y} - \bar{X}\dfrac{p_X}{p_Y}\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)\right] + R\left[\dfrac{p_X}{p_Y}\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right]}{p_X / \alpha} \\ &= \frac{(1-\alpha)}{p_Y}\left[R - p_X\bar{X}\right] + \alpha\bar{Y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_M^* &= \frac{\begin{Vmatrix} 1 & \bar{Y} - \bar{X}\dfrac{p_X}{p_Y}\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right) \\ p_Y & R \end{Vmatrix}}{\Delta} = \frac{R - \left[p_Y\left(\bar{Y} - \bar{X}\dfrac{p_X}{p_Y}\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)\right]}{p_X / \alpha} \\ &= \frac{\alpha}{p_X}\left[R - p_Y\bar{Y}\right] + (1-\alpha)\bar{X} \end{aligned}$$

Le domande così ottenute esprimono la quantità in relazione a R, ai prezzi e al livello "di base-sussistenza" di X e Y (interpretare). A cosa corrispondono ponendo $\bar{X} = \bar{Y} = 0$?
Se moltiplichiamo ambo i lati delle equazioni di domanda per il prezzo otteniamo

[6] Va benissimo anche la sostituzione di SMS = prezzo relativo nella terza condizione.

$$p_Y Y_M^* = \left(1-\alpha\right)\left[R - p_X\bar{X}\right] + \alpha p_Y \bar{Y}$$

$$p_X X_M^* = \alpha\left[R - p_Y\bar{Y}\right] + \left(1-\alpha\right) p_X \bar{X}$$

I termini di sinistra indicano la spesa per l'acquisto della quantità ottima eccedente la sussistenza dei due beni. Se sommiamo le due spese otteniamo *R* che corrisponde ovviamente alla somma dei due termini di destra. Inoltre se dividiamo i termini di sinistra e di destra per *R* otteniamo le quote di reddito speso per l'acquisto delle quantità ottime. La somma delle quote è pari a 1. Quanto precede è un'anticipazione della trattazione del **sistema lineare di spesa**.

Sostituendo le domande ordinarie in *U* otteniamo la funzione di utilità indiretta

$$v(R, p_X, p_Y, \bar{X}, \bar{Y}) = \left[\frac{\alpha}{p_X}\left[R - p_Y\bar{Y}\right] + \left(1-\alpha\right)\bar{X}\right]^{\alpha}\left[\frac{\left(1-\alpha\right)}{p_Y}\left[R - p_X\bar{X}\right] + \alpha\bar{Y}\right]^{1-\alpha}$$

La funzione esprime il livello di utilità quale funzione di massimo valore dell'utilità ordinaria, dato *R*, i prezzi e al livello "di base" di *X* e *Y*. A cosa corrisponde ponendo $\bar{X} = \bar{Y} = 0$?
Calcoliamo per esercizio le elasticità delle domande ordinarie.

$$\eta_R^X = \left(\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{\alpha}{p_X}\left[R - p_Y\bar{Y}\right] + \left(1-\alpha\right)\bar{X}\right]\right)\frac{R}{\frac{\alpha}{p_X}\left[R - p_Y\bar{Y}\right] + \left(1-\alpha\right)\bar{X}}$$

$$= \frac{\alpha R}{\alpha\left[R - p_Y\bar{Y}\right] + \frac{\left(1-\alpha\right)\bar{X}}{p_X}}$$

$$= \frac{\alpha R p_X}{\alpha p_X\left[R - p_Y\bar{Y}\right] + \left(1-\alpha\right)\bar{X}} > 0$$

$$\eta_R^Y = \left(\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{\left(1-\alpha\right)}{p_Y}\left[R - p_X\bar{X}\right] + \alpha\bar{Y}\right]\right)\frac{R}{\frac{\left(1-\alpha\right)}{p_Y}\left[R - p_X\bar{X}\right] + \alpha\bar{Y}}$$

$$= \frac{(1-\alpha)R}{\left(1-\alpha\right)\left[R - p_X\bar{X}\right] + \frac{\alpha\bar{Y}}{p_Y}}$$

$$= \frac{(1-\alpha)R p_Y}{(1-\alpha)p_Y\left[R - p_X\bar{X}\right] + \alpha\bar{Y}} > 0$$

In entrambi i casi i beni sono **normali** (che vuol dire?) e con $\bar{X} = \bar{Y} = 0$ l'elasticità al reddito è unitaria.
L'elasticità ai prezzi "propri" è

$$\eta_{p_X}^X = \left(\frac{\partial}{\partial p_X}\left[\frac{\alpha}{p_X}\left[R - p_Y\bar{Y}\right] + \left(1-\alpha\right)\bar{X}\right]\right)\frac{p_X}{\frac{\alpha}{p_X}\left[R - p_Y\bar{Y}\right] + \left(1-\alpha\right)\bar{X}}$$
$$= \frac{-\left(\frac{\alpha}{p_X}\left[R - p_Y\bar{Y}\right]\right)}{\frac{\alpha}{p_X}\left[R - p_Y\bar{Y}\right] + \left(1-\alpha\right)\bar{X}}$$

Come si vede $\left|\eta_{p_X}^X\right| < 1$.

$$\eta_{p_Y}^Y = \left(\frac{\partial}{\partial p_Y}\left[\frac{\left(1-\alpha\right)}{p_Y}\left[R - p_X\bar{X}\right] + \alpha\bar{Y}\right]\right)\frac{p_Y}{\frac{\left(1-\alpha\right)}{p_Y}\left[R - p_X\bar{X}\right] + \alpha\bar{Y}}$$
$$= \frac{-(1-\alpha)\left[R - p_X\bar{X}\right]}{\left(1-\alpha\right)\left[R - p_X\bar{X}\right] + \alpha p_Y\bar{Y}} < 0$$

Come si vede anche $\left|\eta_{p_Y}^Y\right| < 1$.

A cosa corrisponderebbero le elasticità ponendo $\bar{X} = \bar{Y} = 0$?
Calcoliamo adesso le elasticità incrociate.

$$\eta_{p_Y}^X = \left(\frac{\partial}{\partial p_Y}\left[\frac{\alpha}{p_X}\left[R - p_Y\bar{Y}\right] + \left(1-\alpha\right)\bar{X}\right]\right)\frac{p_Y}{\frac{\alpha}{p_X}\left[R - p_Y\bar{Y}\right] + \left(1-\alpha\right)\bar{X}}$$
$$= \frac{-\left(\alpha\frac{p_Y}{p_X}\left[\bar{Y}\right]\right)}{\frac{\alpha}{p_X}\left[R - p_Y\bar{Y}\right] + \left(1-\alpha\right)\bar{X}} < 0$$
$$\eta_{p_X}^Y = \left(\frac{\partial}{\partial p_X}\left[\frac{\left(1-\alpha\right)}{p_Y}\left[R - p_X\bar{X}\right] + \alpha\bar{Y}\right]\right)\frac{p_X}{\frac{\left(1-\alpha\right)}{p_Y}\left[R - p_X\bar{X}\right] + \alpha\bar{Y}}$$
$$= \frac{-\frac{\left(1-\alpha\right)p_X\bar{X}}{p_Y}}{\frac{\left(1-\alpha\right)}{p_Y}\left[R - p_X\bar{X}\right] + \alpha\bar{Y}} < 0$$

Si tratta di beni a consumo complementare.

ESERCIZIO 3

Sia

$$u = \ln(U) = \ln(x - \overline{x}) + \ln(y - \overline{y})$$

una funzione di utilità anch'essa di tipo Stone-Geary semplificata[7] con $x - \overline{x} > 0$ e $y - \overline{y} > 0$. Diciamo: l'individuo comincia ad ottenere utilità quando il consumo supera un certo livello minimo di sopravvivenza. Ipotizzando un consueto vincolo di spesa, ricavare:

a) Domande compensate o Hicksiane
b) Funzione di spesa (con sue proprietà)
c) Domande ordinarie
d) Funzione di utilità indiretta (con sue proprietà)
e) (**facoltativo**) Equazione di Slutsky (con sue proprietà)
f) (**facoltativo** ma parte del punto e) Matrice dei termini di sostituzione della matrice di Slutsky, sua simmetria e semi-definizione negativa. Giustificare la simmetria in base alle proprietà dei termini di variazione seconda incrociati della funzione di spesa.

Le parti e) ed f) saranno trattate a lezione.

La domanda Hicksiana si ottiene minimizzando la spesa rispetto a *x* e *y* con un vincolo sull'utilità. La Lagrangiana è:

$$\Lambda = (p_x x + p_y y) + \lambda\left[\overline{u} - \ln(x - \overline{x}) - \ln(y - \overline{y})\right]$$

Le condizioni del primo ordine sono (supponiamo soddisfatte quelle del secondo ordine)

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = p_x - \frac{\lambda}{(x - \overline{x})} = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y} = p_y - \frac{\lambda}{(y - \overline{y})} = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = \overline{u} - \ln(x - \overline{x}) - \ln(y - \overline{y}) = 0$$

Dalle condizioni del primo ordine otteniamo

$$p_x(x - \overline{x}) = p_y(y - \overline{y})$$

$$e^{\bar{U}} = (x - \overline{x})(y - \overline{y})$$

[7] Deriva dalla trasformazione logaritmica di $U = (x - \overline{x})(y - \overline{y})$. Si potrebbe anche supporre che dal consumo di ogni bene l'individuo sottragga una parte da donare ad altri o da usare per fare un accantonamento non consumato. Il livello di utilità dipende dall'eccedenza.

Sostituendo $(x-\overline{x})$ dalla seconda nella prima equazione otteniamo per *y* e poi per *x*

$$y_H = \left(\frac{p_x}{p_y}\overline{U}\right)^{\frac{1}{2}} + \overline{y} \qquad x_H = \left(\frac{p_y}{p_x}\overline{U}\right)^{\frac{1}{2}} + \overline{x} \qquad \textbf{(F1)}$$

La funzione di spesa

Si ottiene sostituendo **(F1)** nel vincolo della spesa del consumatore. Otteniamo

$$\begin{aligned} e(p_x, p_y, \overline{U}) &= p_y\left[\left(\frac{p_x}{p_y}e^{\overline{U}}\right)^{\frac{1}{2}} + \overline{y}\right] + p_x\left[\left(\frac{p_y}{p_x}e^{\overline{U}}\right)^{\frac{1}{2}} + \overline{x}\right] \\ &= 2\left(p_x p_y e^{\overline{U}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left[p_y\overline{y} + p_x\overline{x}\right] \qquad \textbf{(F2)} \end{aligned}$$

Pro-memoria. La funzione di spesa di un consumatore è definibile come quella funzione che dato un insieme di prezzi dei beni associa ad ogni dato livello di utilità cui aspira il consumatore l'esborso minimo complessivo (spesa) necessario per il suo ottenimento. In termini formali si ha:

$$\begin{aligned} &e(p_1,...,p_N;U) = \\ &\min_{x_1,x_2,...,x_N}\left\{\sum_{i=1}^{N} p_i x_i(p_1,...,p_N;R) \middle| U\left(x_1(p_1,...,p_N;R),...,x_N(p_1,...,p_N;R)\right) \geq u\right\} \\ &\forall i \in N \end{aligned}$$

dove x_i è appunto la domanda ordinaria del bene *i* e U(.) la funzione di utilità diretta e ***u*** il livello fissato di utilità. La funzione di spesa è dunque una funzione di minimo valore del problema di minimizzazione vincolata della spesa. Tale problema di minimizzazione vincolata rappresenta il problema *duale* di quello di massimizzazione dell'utilità dato il vincolo costituito dalle risorse spendibili, la cui funzione (di massimo) valore è la funzione di utilità indiretta.

Funzione di domanda ordinaria o Marshalliana

Si ottiene massimizzando l'utilità dato il vincolo alla spesa. Ovvero massimizzando

$$\Lambda = \left[(\ln(x-\overline{x}) + \ln(y-\overline{y})\right] + \lambda\left[R - p_x x - p_y y\right]$$

Le condizioni del primo ordine sono (supponiamo soddisfatte quelle del secondo ordine)

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \frac{1}{(x-\overline{x})} - \lambda p_x = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y} = \frac{1}{(y - \overline{y})} - \lambda p_y = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = R - p_x x - p_y y = 0$$

Da cui

$$\frac{(y - \overline{y})}{(x - \overline{x})} = \frac{p_x}{p_y}$$

Sostituendo prima $(x - \overline{x})$ e poi $(y - \overline{y})$ dalla prima equazione nel vincolo otteniamo

$$y_M = \frac{1}{2p_y}\left[R - p_y\overline{y} - p_x\overline{x}\right] \qquad x_M = \frac{1}{2p_x}\left[R - p_x\overline{x} - p_y\overline{y}\right] \qquad \textbf{(F3)}$$

Utilità indiretta

La funzione di utilità indiretta è definibile come quella funzione che associa il livello di utilità massimo raggiungibile da un individuo ad ogni insieme di prezzi e ad *R*. Formalmente si ha:

$$v(\boldsymbol{p},R) = \max_{x_1,\dots,x_N}\left\{U(M_1,\dots,M_N)\middle|\sum_{i=}^{N} p_i M_i(\boldsymbol{p},R) \le R\right\} \ \forall i \in N$$

dove M_i è la domanda ordinaria del bene *i* e *U*(.) è la funzione di utilità. La funzione di utilità indiretta è dunque la **funzione di massimo valore** del problema di massimizzazione dell'utilità individuale; problema di massimo vincolato che rappresenta il *duale* di quello di minimizzazione della spesa dato il vincolo costituito dall'utilità minima richiesta, la cui funzione di minimo valore è la funzione di spesa (vedi).

Come si ottiene?

Le funzioni di domanda ordinarie (o Marshalliane) si sostituiscono nella funzione di utilità per ottenere:

$$\begin{aligned}
v(p_x, p_y, R) &= \ln(x - \overline{x}) + \ln(y - \overline{y}) \\
&= \ln(x_M - \overline{x}) + \ln(y_M - \overline{y}) \\
&= \ln\left[(\frac{1}{2p_x}\left[R - p_x\overline{x} - p_y\overline{y}\right] - \overline{x})\right] + \ln\left[(\frac{1}{2p_y}\left[R - p_y\overline{y} - p_x\overline{x}\right] - \overline{y})\right] \\
&= \ln\left[(\frac{1}{2p_x}\left[R - p_x\overline{x} - p_y\overline{y}\right] - \overline{x})(\frac{1}{2p_y}\left[R - p_y\overline{y} - p_x\overline{x}\right] - \overline{y})\right] \\
&= \ln\left[\frac{\left(3\,p_X\overline{X} + p_Y\overline{Y} - R\right)\left(p_X\overline{X} + 3p_Y\overline{Y} - R\right)}{4p_x p_y}\right]
\end{aligned}$$

Proprietà

Data una funzione di utilità continua che rappresenta un sistema di preferenze localmente non soddisfatte, la funzione di utilità indiretta è:

1. non crescente rispetto ai prezzi;
2. non decrescente rispetto a *R* se $\frac{R}{2} \geq p_X \overline{X} + p_Y \overline{Y}$

poiché $\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{2(R - 2p_X\overline{X} - 2p_Y\overline{Y})}{\left(R - p_X\overline{X} - 3p_Y\overline{Y}\right)\left(R - 3p_X\overline{X} - p_Y\overline{Y}\right)}$

3. omogenea di grado zero rispetto ai prezzi e a *R*;
4. quasi-convessa in prezzi ed *R*. ???

Esercizio 5

Torniamo alla funzione

$u = \ln(U) = \ln(x - \overline{x}) + \ln(y - \overline{y})$

con $x - \overline{x} > 0$ e $y - \overline{y} > 0$. Dati i risultati "intermedi precedenti, trovare la **S** e valutarne le proprietà.

Date le due domande Hicksiane, calcoliamo

$\frac{\partial x_H}{\partial p_x} = -\frac{\left(p_y e^{\overline{U}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2p_x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\left[R - p_y\overline{y} - p_x\overline{x}\right]}{4p_x^2}$ dove l'ultimo passaggio viene dalla sostituzione dell'utilità indiretta a quella diretta (possiamo farlo?)

$$\frac{\partial y_H}{\partial p_y} = -\frac{\left(p_x e^{\overline{U}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2p_y^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\left[R - p_y\overline{y} - p_x\overline{x}\right]}{4p_y^2}$$

$$\frac{\partial x_H}{\partial p_y} = \frac{R - p_y\overline{y} - p_x\overline{x}}{4p_x p_y} = \frac{\partial y_H}{\partial p_x}$$

Allora

$$S = \begin{bmatrix} \dfrac{-\left[R - p_y\overline{y} - p_x\overline{x}\right]}{4p_x^2} & \dfrac{R - p_y\overline{y} - p_x\overline{x}}{4p_x p_y} \\ \dfrac{R - p_y\overline{y} - p_x\overline{x}}{4p_x p_y} & \dfrac{-\left[R - p_y\overline{y} - p_x\overline{x}\right]}{4p_y^2} \end{bmatrix}$$

La matrice è simmetrica.

Vediamo se è negativa semi-definita[8]: per il determinante del primo minore abbiamo $\dfrac{-\left[R - p_y\overline{y} - p_x\overline{x}\right]}{4p_x^2} \leq 0$ se la spesa per la quantità di sopravvivenza relativa a y e a x *non supera R*. È ragionevole assumerlo, altrimenti le domande per la parte eccedente la sopravvivenza sarebbero nulle e la funzione di utilità (nei logaritmi) non sarebbe definita.

Il determinante 2 × 2 di **S** è:

$$\frac{\left[R - p_y\overline{y} - p_x\overline{x}\right]^2}{16p_x^2 p_y^2} - \left(\frac{R - p_y\overline{y} - p_x\overline{x}}{4p_x p_y}\right)^2 = 0$$

La matrice è negativa semi definita poiché dato il segno non positivo di D_1, D_2 è pari a zero.
Siamo in grado di dimostrare che essa coincide con l'hessiana della funzione di spesa? C'è bisogno di fare i calcoli oppure possiamo dirlo sulla base della teoria? (Fare i calcoli comunque)

Esercizio 6

Sia $U = \sqrt{XY}$ sulla retta reale positiva e sia dato il vincolo $R - p_X X - p_Y Y = 0$. Dopo aver verificato che la matrice Hessiana orlata è

$$H = \begin{bmatrix} 0 & p_X & p_Y \\ p_X & \dfrac{-Y^2}{4(XY)^{\frac{3}{2}}} & \dfrac{1}{4(XY)} \\ p_Y & \dfrac{1}{4(XY)} & \dfrac{-X^2}{4(XY)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}$$

valutare se il punto di stazionarietà

---

[8] Pro memoria: una matrice quadrata 2×2 simmetrica $A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ è negativa semi-definita se $a \leq 0$ e $(ab) - c^2 \geq 0$.

$$P_0 = \left(Y_M = \frac{R}{2p_Y}; X_M = \frac{R}{2p_X}; \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_Y}{p_X}} \right)$$

è un **massimo** (vincolato) o un minimo (vincolato). Mostrare che sostituendo *Po* nella lagrangiana otteniamo

$$\Lambda^* = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{1}{p_X p_Y}} = v(\boldsymbol{p}, R)$$

da cui

$$\Lambda^* = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{1}{p_X p_Y}} = v(\boldsymbol{p}, R)$$

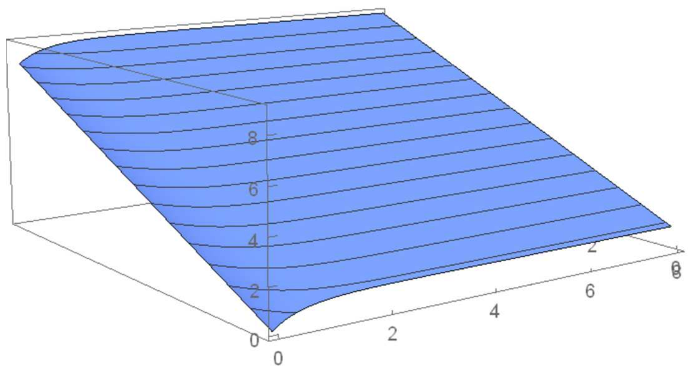
$$\frac{\partial \Lambda^*}{\partial R} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{p_X p_Y}} = \frac{\partial U(X^* Y^*)}{\partial R} = \frac{\partial v(\boldsymbol{p}, R)}{\partial R}$$

Provare ad interpretare.

Esercizio 7

Sia $U = 1 - e^{-2X} + Y$

Il cui grafico è



Che interpretazione diamo delle curve di livello? Cosa segnalano?

In questo caso

$$H = \begin{bmatrix} -4e^{-2X} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \|H_1\| = -4e^{-2X} < 0 \quad \|H_2\| = 0$$

Inoltre gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -4e^{-2X}$$

H è semi definita negativa e la U è quasi concava. **Ma particolare**.

Ricavare le domande ordinarie e compensate dato un consueto vincolo di bilancio.

Approfondimento

La funzione Stone-Geary (quella vera) e il Sistema Lineare di Spesa

Il Sistema Lineare di Spesa (LES) è un modello strutturale usato per spiegare le singole domande di un insieme di beni mediante la derivazione analitica della spesa relativa a ciascuno di essi.
La funzione Stone-Geary viene spesso utilizzata per modellare i problemi che coinvolgono livelli di sussistenza di consumo. In questi casi, è necessario consumare un certo livello minimo dei beni, indipendentemente dal loro prezzo o dal reddito del consumatore.

$$U = \gamma \ln(A-\alpha) + (1-\gamma)\ln(B-\beta)$$

La Stone-Geary utilizza quindi la funzione dei log naturali per modellare l'utilità. La somma di tutte le proporzioni dei beni consumati deve essere uguale a 1. Nel problema seguente, i livelli di sussistenza di A e B sono α e β. Il termine *R* è il "reddito" e p_k {k = a, b} sono i prezzi di A e B.
La lagrangiana e le condizioni di stazionarietà sono:

$$\begin{aligned}
&\Lambda = \gamma \ln(A-\alpha) + (1-\gamma)\ln(B-\beta) + \lambda(R - p_a A - p_b B) \\
&\Lambda_A = \frac{\gamma}{A-\alpha} - p_a\lambda = 0 \\
&\Lambda_B = \frac{1-\lambda}{B-\beta} - p_b\lambda = 0 \\
&\Lambda_\lambda = R - p_a A - p_b B = 0
\end{aligned}$$

Usiamo le prime due condizioni per eliminare il moltiplicatore di Lagrange

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma/(A-\alpha)}{(1-\gamma)/(B-\beta)} = \frac{p_a\lambda}{p_b\lambda} \\
&\Rightarrow \frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{B-\beta}{A-\alpha} = \frac{p_a}{p_b} \\
&\Rightarrow p_a(1-\gamma)(A-\alpha) = p_b\gamma(B-\beta) \\
&\Rightarrow A-\alpha = \frac{p_b\gamma(B-\beta)}{p_a(1-\gamma)} \\
&\Rightarrow A = \frac{p_b}{p_a}\frac{\gamma}{1-\gamma}(B-\beta)+\alpha \qquad B = \frac{p_a}{p_b}\frac{1-\gamma}{\gamma}(A-\alpha)+\beta
\end{aligned}$$

Sostituendo

$$
\begin{aligned}
&R = p_a A + p_b\left(\frac{p_a}{p_b}\frac{1-\gamma}{\gamma}(A-\alpha)+\beta\right)\\
&\Rightarrow R = p_a A + \frac{p_b}{p_b}\frac{1-\gamma}{\gamma}p_a(A-\alpha)+p_b\beta\\
&\Rightarrow R - p_b\beta = p_a A + \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}p_a(A-\alpha)\right)\\
&\Rightarrow R - p_b\beta = p_a A + (1-\gamma)\left(\frac{p_a A}{\gamma}-\frac{p_a\alpha}{\gamma}\right)\\
&\Rightarrow R - p_b\beta = p_a A + \frac{p_a A}{\gamma}-\frac{p_a\alpha}{\gamma}-p_a A+p_a A
\end{aligned}
$$

Moltiplicando l'ultima equazione per γ/p_a otteniamo

$$
\begin{aligned}
A^* &= \frac{\gamma}{p_a}\left(R - p_a\alpha - p_b\beta\right)+\alpha\\
B^* &= \frac{1-\gamma}{p_b}\left(R - p_a\alpha - p_b\beta\right)+\beta
\end{aligned}
$$

1. Ciascuna delle funzioni di A^* e B^* sono le funzioni Marshalliane con utilità di tipo Stone-Geary (verificare proprietà).

2. L'ultimo termine sul lato destro dell'uguaglianza, è il consumo di sussistenza. Un consumatore consumerà sempre questa quantità indipendentemente da R o dal prezzo.

3. Il termine $R - p_a\alpha - p_b\beta$ è il "reddito" che resta disponibile al consumatore dopo che i livelli di sussistenza sono stati soddisfatti. È in effetti il "reddito residuo" disponibile per consumare oltre il livello di sussistenza. Il consumatore alloca il reddito in eccesso rispetto alla spesa di sussistenza in proporzione al parametro γ che si definisce *marginal budget share* mentre $R - p_a\alpha - p_b\beta$ viene a volte chiamato reddito super numerario.

Costruiamo le quote di spesa

$$
\begin{aligned}
S_A &= \frac{p_a A^*}{R} = \gamma\left(1-\frac{p_a\alpha+p_b\beta}{R}\right)+\frac{p_a\alpha}{R} = \gamma - \frac{\gamma}{R}\left[p_a\alpha+p_b\beta-\frac{p_a\alpha}{\gamma}\right]\\
S_B &= \frac{p_b B^*}{R} = (1-\gamma)\left(1-\frac{p_a\alpha+p_b\beta}{R}\right)+\frac{p_b\beta}{R} = (1-\gamma) - \frac{(1-\gamma)}{R}\left[p_a\alpha+p_b\beta-\frac{p_b\beta}{(1-\gamma)}\right]
\end{aligned}
$$

Con $\alpha = \beta = 0$ siamo nel caso Cobb-Douglas e quindi $\frac{p_a A^*}{R} = \gamma$ e $\frac{p_b B^*}{R} = (1-\gamma)$. Valutare ad esempio per *B* se la quota di spesa è più alta con preferenze C-D o con preferenze S-G (valutare quindi il segno delle parentesi quadre). Se $\frac{p_a A^*}{p_b B^*} \geq \frac{\gamma}{(1-\gamma)}$ la quota Cobb-Douglas è maggiore o al più uguale a quella S-G.

Calcoliamo le elasticità delle domande (solo calcolo per il caso A; farlo per B)

$$
\eta_{p_a}^A = -\frac{\gamma\left[1-(p_a\alpha / R)\right]}{S_A}
$$

La funzione S-G permette di ottenere solo domande inelastiche $\left|\eta_{p_a}^A\right| < 1$. Ovviamente vale anche per B.

$$\eta^A_{p_b} = -\frac{\gamma\left[(\beta p_b) / R)\right]}{S_A} < 0$$

La funzione S-G è quindi definibile solo per beni complementari.

$$\eta^A_R = \frac{\gamma}{S_A} > 0$$

La funzione S-G non può essere definita per beni inferiori.

Aggregazione di Engel

Abbiamo

$$p_a \frac{\gamma}{p_a} + p_b \frac{(1-\gamma)}{p_b} = 1$$

Che verifica la condizione. La media ponderata delle elasticità della domanda al reddito (dove il peso è la share di spesa) è unitaria il che implica che l'aumento percentuale medio della domanda è pari all'aumento del reddito: se R aumenta dell'1% anche la domanda aumenta mediamente dell'1%.

Aggregazione di Cournot

Abbiamo

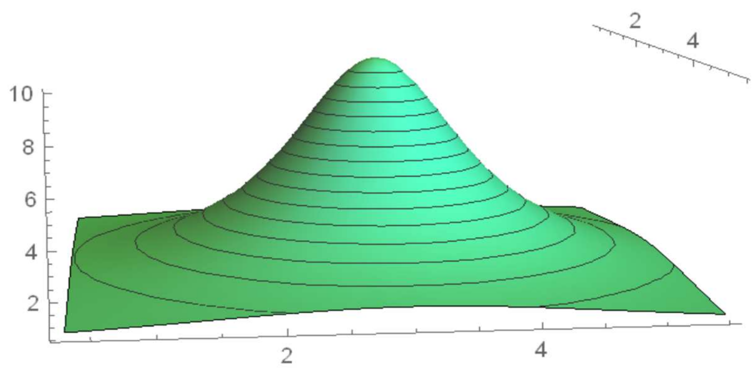
$$p_a\left[\frac{-\gamma\left(R - p_b\alpha\right)}{p_a^2}\right] + p_b\left[\frac{-(1-\gamma)\beta}{p_b}\right] = -A$$

Pro-memoria

Funzioni di utilità quasi concave (con *bliss point*)

Esempio (il cappello di Harry Potter)

Sia $U = \frac{10}{1 + (X-3)^2 + (Y-3)^2)}$ una funzione da $R^2_+ \rightarrow R$ il cui grafico è riprodotto sotto. Notare il cambio di concavità.



$$\frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{20(-3 + X)}{(1 + (-3 + X)^2 + (-3 + Y)^2)^2} < 0$$
$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0 \text{ per } X = 3; \; \frac{\partial U}{\partial X} > 0 \text{ per } 0 \leq X \leq 3; \; \frac{\partial U}{\partial X} < 0 \text{ per } X > 3$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{20(-3 + Y)}{(1 + (-3 + X)^2 + (-3 + Y)^2)^2} < 0$$
$$\frac{\partial U}{\partial Y} = 0 \text{ per } Y = 3; \; \frac{\partial U}{\partial Y} > 0 \text{ per } 0 \leq Y < 3; \; \frac{\partial U}{\partial Y} < 0 \text{ per } Y > 3$$

Con

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \frac{20(17 - 18X + 3X^2 + 6Y - Y^2)}{(19 - 6X + X^2 - 6Y + Y^2)^3}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = \frac{20(17 + 6X - X^2 - 18Y + 3Y^2)}{(19 - 6X + X^2 - 6Y + Y^2)^3}$$

Ecc.

La joint pdf di una gaussiana a due variabili è un altro esempio.